Universidade de Mogi das Cruzes – UMC

Campos Villa Lobos

Cálculo Diferencial e Integral II
Parte IV

Engenharia Civil *Engenharia Mecânica*

Profa. Marília Rocha – marilia@umc.br
2º semestre de 2015

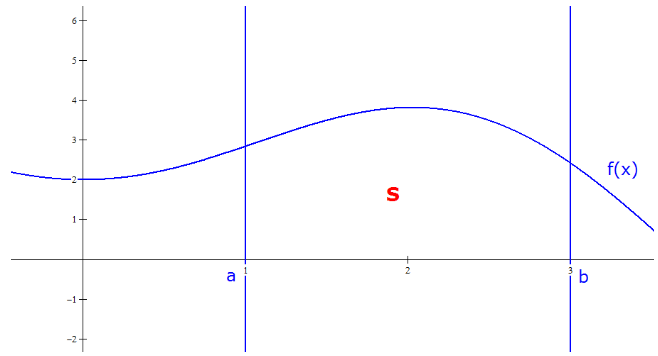
ÍNDICE

1. Cálculo de Áreas

1.1. 1º Caso

A função f é contínua no intervalo e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

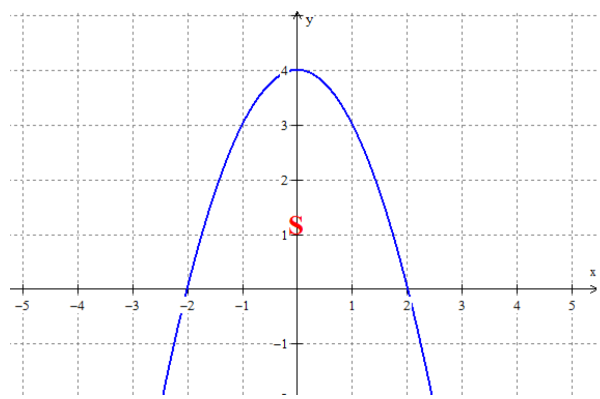
$$A = \int_a^b f(x).dx$$



1.1.1. Exemplo

Calcule a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.

Gráfico:



Raízes:

$4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Pontos de Intersecção com o eixo dos x:

$P(-2,0)$ e $Q(2,0)$

Note que $f(x) \geq 0$ no intervalo $[-2,2]$ (1o caso)

Vértice:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4.1.4 = 16$

$V(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a})$

$V(0;4)$

Ponto de Intersecção com o eixo dos y:

$y = 4 - x^2$

$y = 4 - 0$ $\qquad R(0,4)$

$y = 4$

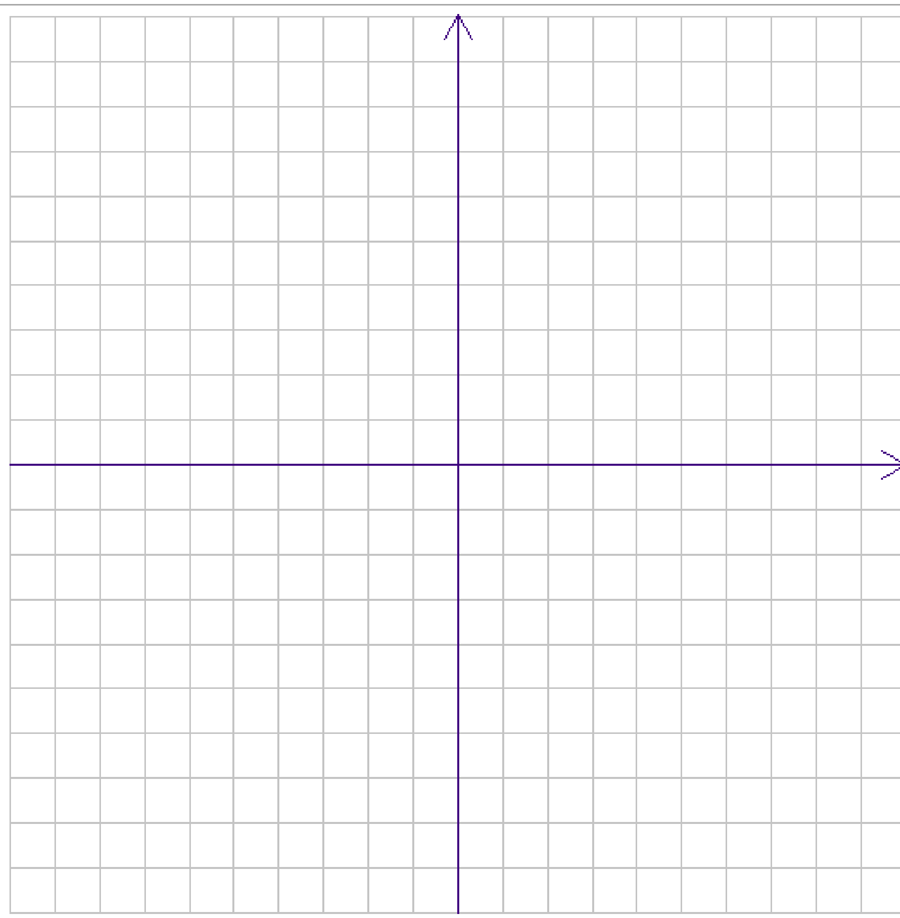
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(4.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) =$$

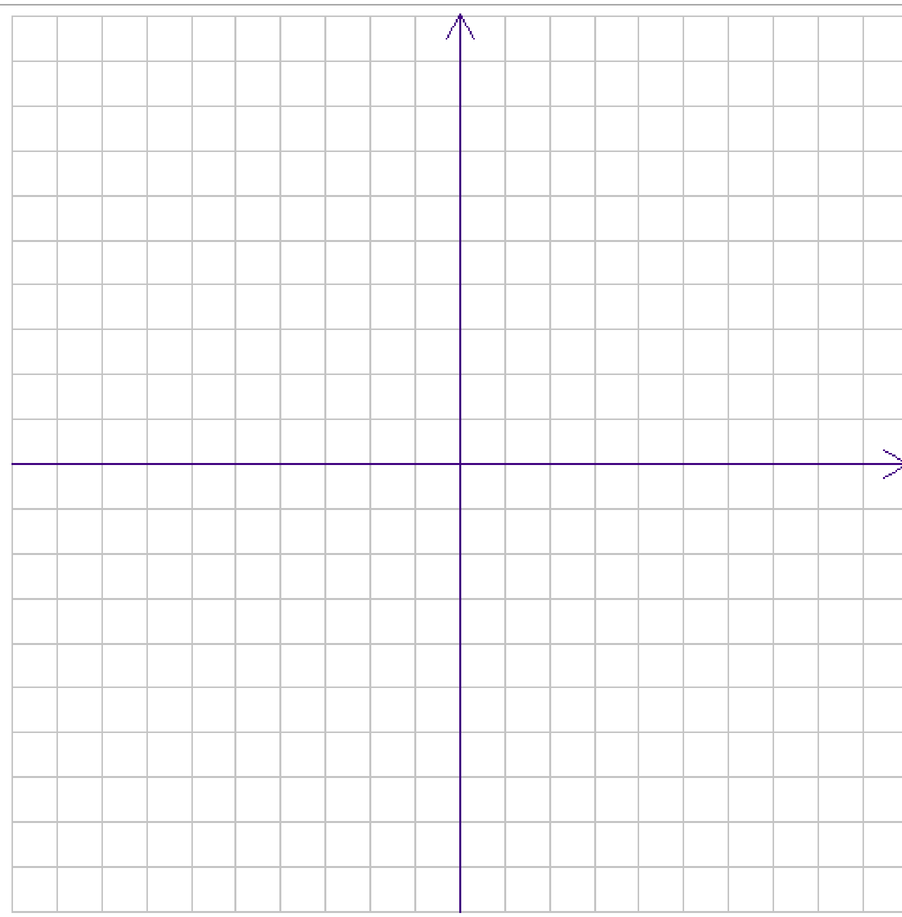
$$= 16 - \frac{16}{3} = \frac{48 - 16}{3} = \frac{32}{3} u.a.$$

1.1.2. Exercícios

1. Calcule a área sob o gráfico da função $y = x^2 - 5x + 9$, $1 \leq x \leq 4$ e represente graficamente.



2. Calcule a área sob o gráfico da função $y = x^2 + 7$, $0 \le x \le 3$ e represente graficamente.

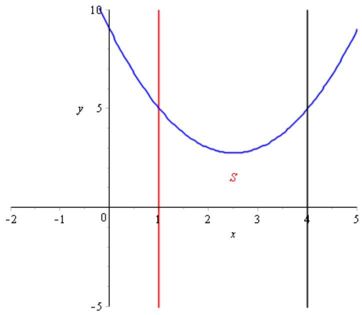


Respostas

1.

$$\int_1^4 (x^2 - 5x + 9)\, dx$$

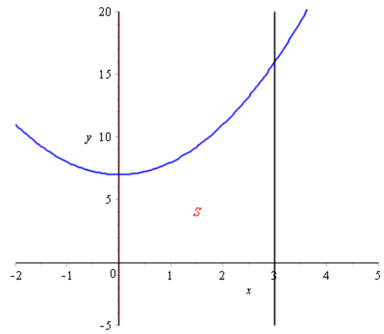
$$\frac{21}{2}$$



2.

$$\int_0^3 (x^2 + 7)\, dx$$

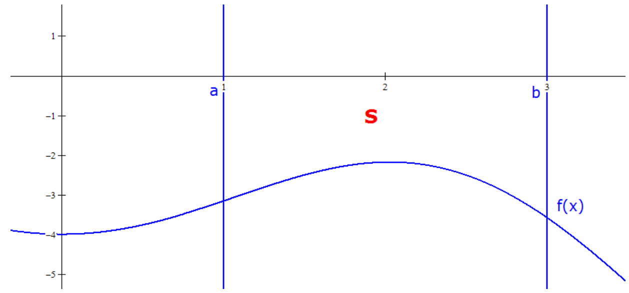
$$30$$



1.2. 2º Caso

A função f é contínua no intervalo e $f(x) \le 0$, para todo $x \in [a,b]$. Neste caso toma-se o módulo da integral

$$A = \left| \int_a^b f(x).dx \right|$$



1.2.1. Exemplo

Calcule a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x.

Raízes:

$-4 + x^2 = 0$

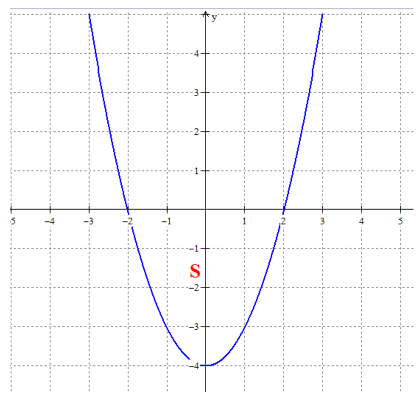
$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Pontos de Intersecção com o eixo dos x:

$P(-2,0)$ e $Q(2,0)$

Gráfico:



Note que $f(x) \le 0$ no intervalo $[-2,2]$ (2o caso)

Vértice:

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 - 4.1.(-4) = 16$

$V(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a})$

$V(0;-4)$

Ponto de Intersecção com o eixo dos y:

$y = -4 + x^2$

$y = -4 + 0 \qquad R(0,-4)$

$y = -4$

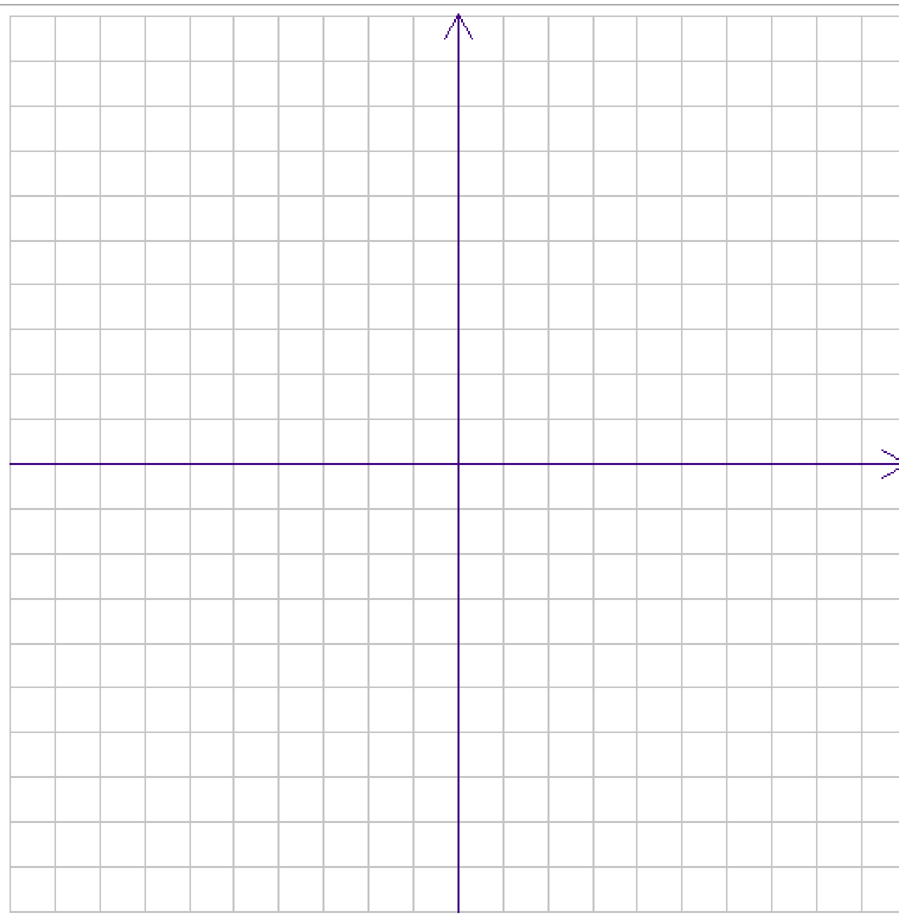
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| = \left| \int_{-2}^{2} (-4 + x^2)dx \right| = \left| \left(-4x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{2} \right| =$$

$$= \left| \left(-4.2 + \frac{2^3}{3} \right) - \left(-4(-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) \right| = \left| -8 + \frac{8}{3} - \left(8 - \frac{8}{3} \right) \right| =$$

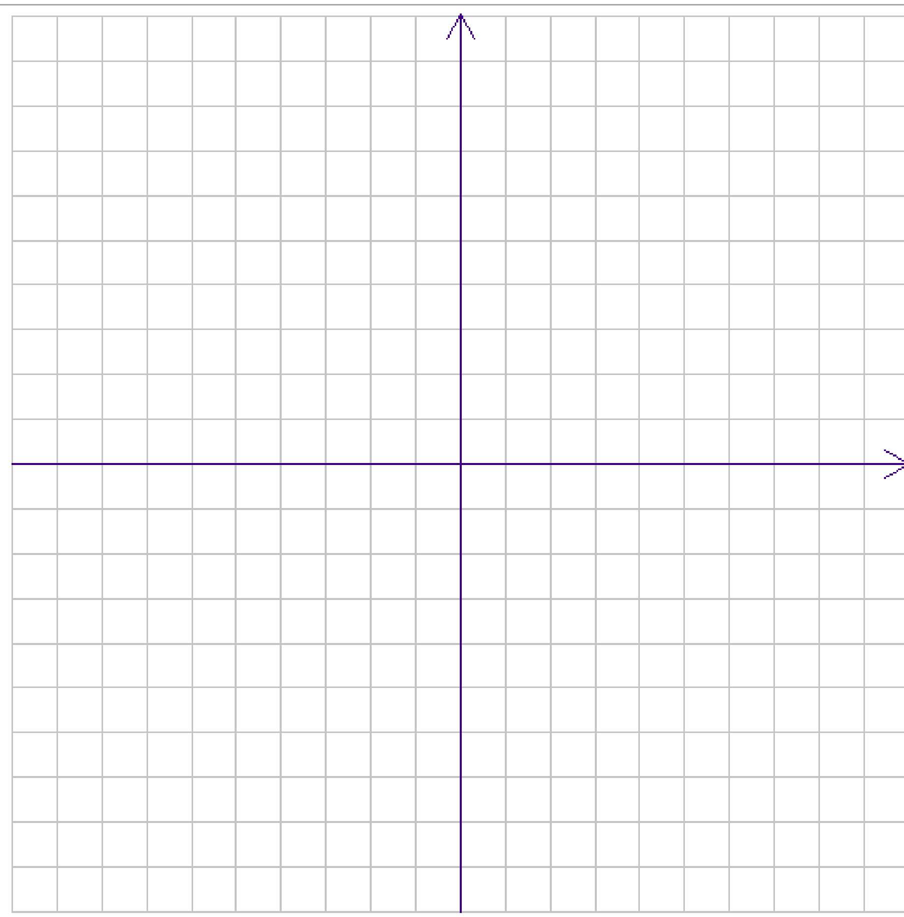
$$= \left| -16 + \frac{16}{3} \right| = \left| \frac{-48 + 16}{3} \right| = \frac{32}{3} u.a.$$

1.2.2. Exercícios

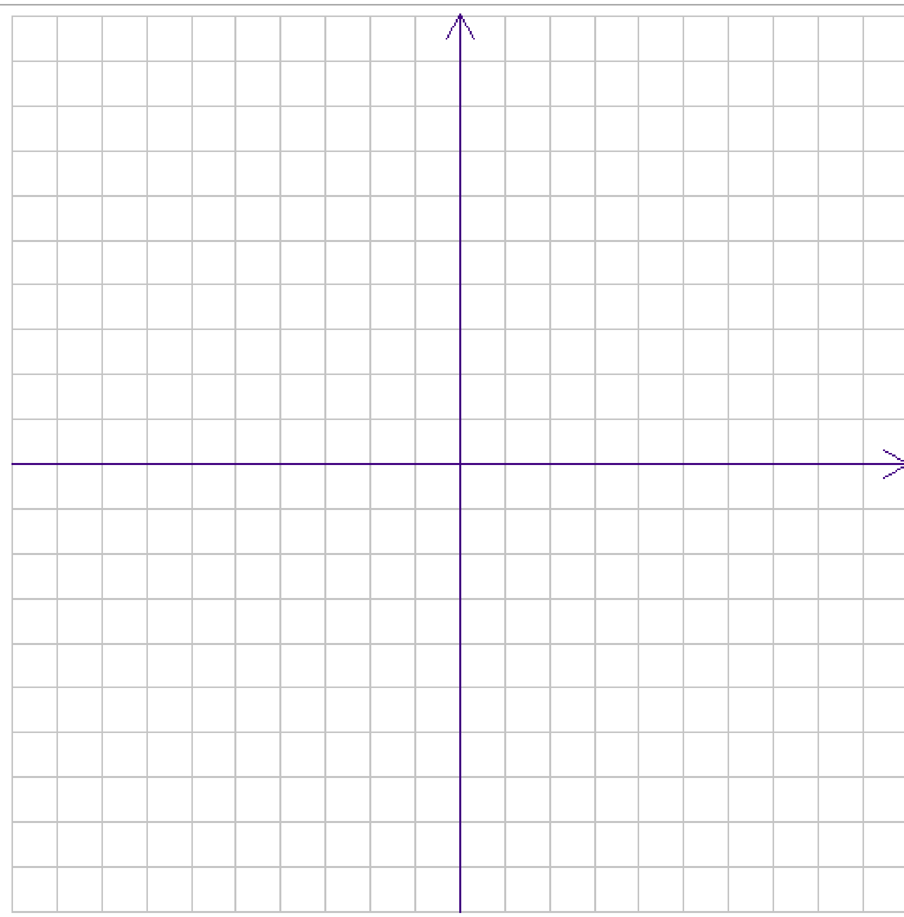
1.Calcule a área limitada pelo gráfico da função $y=-x^2+5x-9$ e o eixo dos x, de $1\leq x\leq 4$, e represente graficamente.



2. Calcule a área sob o gráfico da função $y = x^2 - 9$ e o eixo dos x e represente graficamente.



3. Calcule a área sob o gráfico da função $y = senx$ e pelo eixo dos x, de $0 \leq x \leq 2\pi$ e represente graficamente.

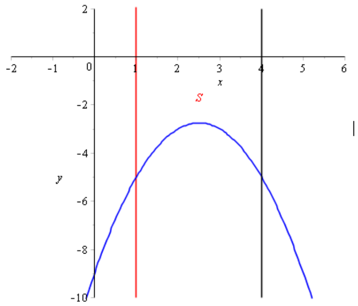


Respostas:

1.

$$-\left(\int_{1}^{4} \left(-x^2 + 5\,x - 9\right)\,dx\right)$$

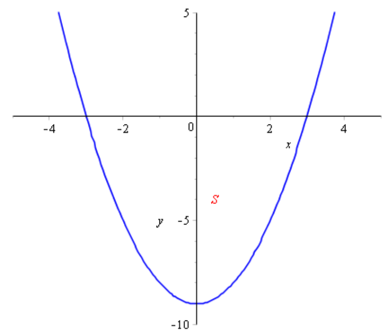
$$\frac{21}{2}$$



2.

$$-\left(\int_{-3}^{3} \left(x^2 - 9\right)\,dx\right)$$

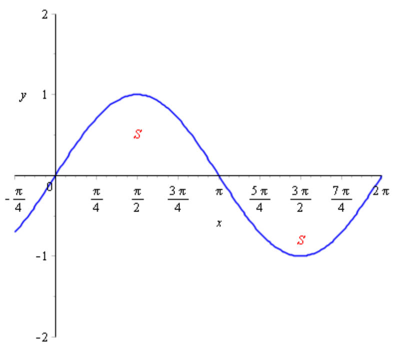
$$36$$



3.

$$\int_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx - \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx\right)$$

$$4$$

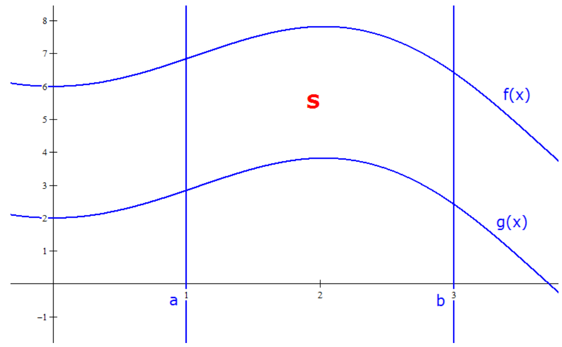


1.3. 3º Caso

As funções f e g são contínuas no intervalo e a área é limitada por $f(x)$ e $g(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

$$A = \int_a^b f(x).dx - \int_a^b g(x).dx$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)].dx$$



No caso geral, deslocar o eixo dos x de maneira que os gráficos das funções permaneçam acima dele (funções não negativas), no intervalo considerado.

1.3.1. Exemplo

Calcule a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Para $y = x^2$

Raízes:

$x^2 = 0$

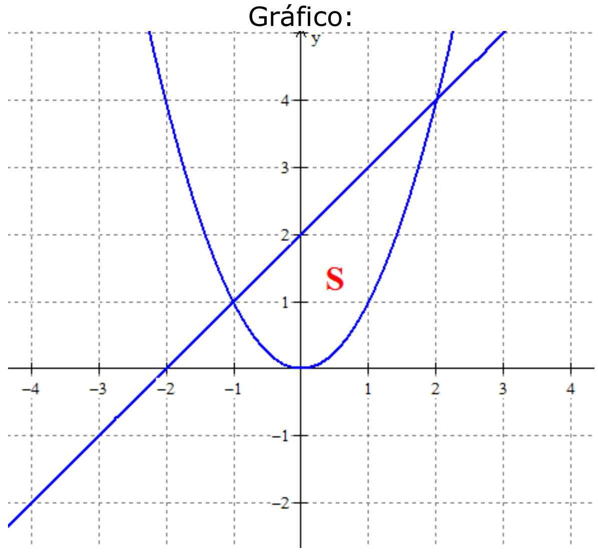
$x = 0$

$P(0,0)$

Para $y = x + 2$

$Q(0,2)$ e $Q(0,2)$

Gráfico:



Note que a área está compreendida entre as curvas dos gráficos de $y = x + 2$ e $y = x^2$, no intervalo $[-1,2]$ (3o caso).

Determinação do intervalo:

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 9$

$x' = 2; x'' = -1$

Intervalo: $[-1,2]$

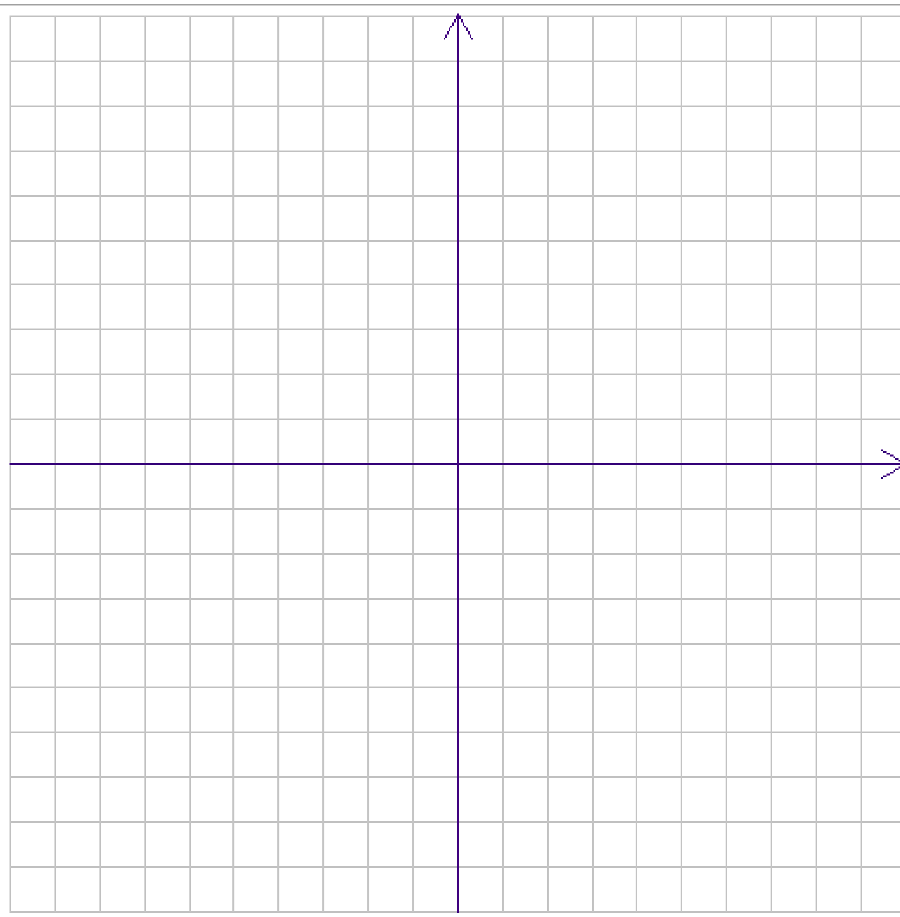
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^2 [(x+2) - x^2]dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2.2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \left(2 + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right) =$$

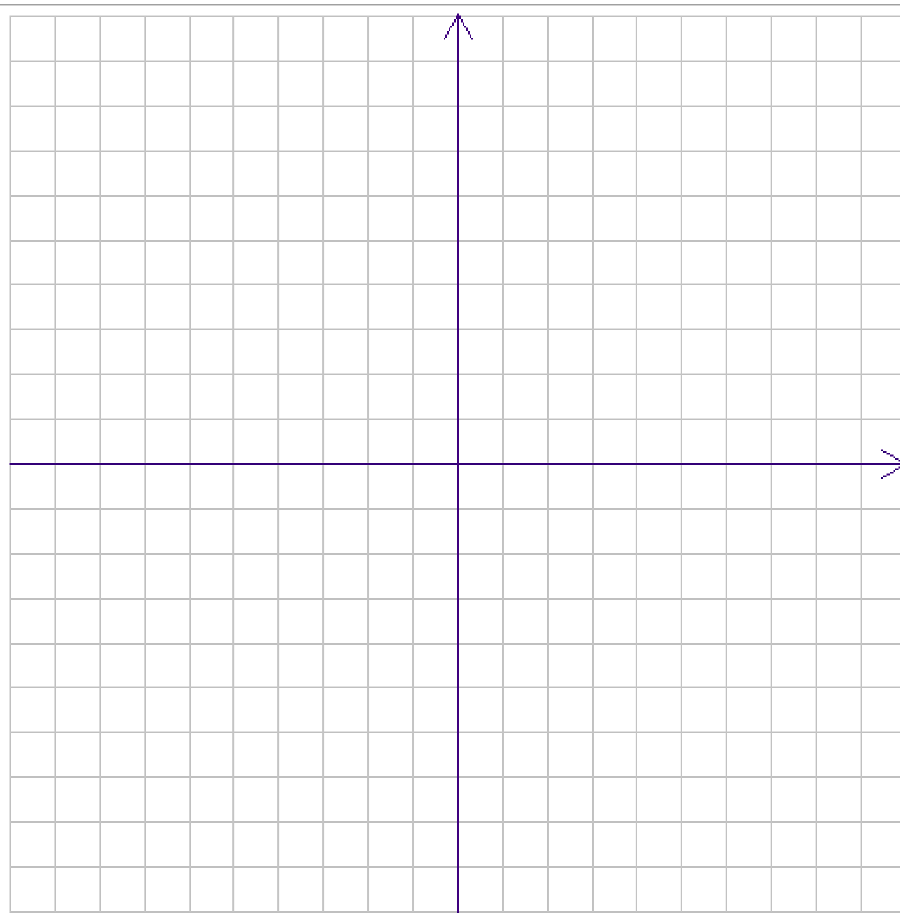
$$= 6 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2} u.a.$$

1.3.2. Exercícios

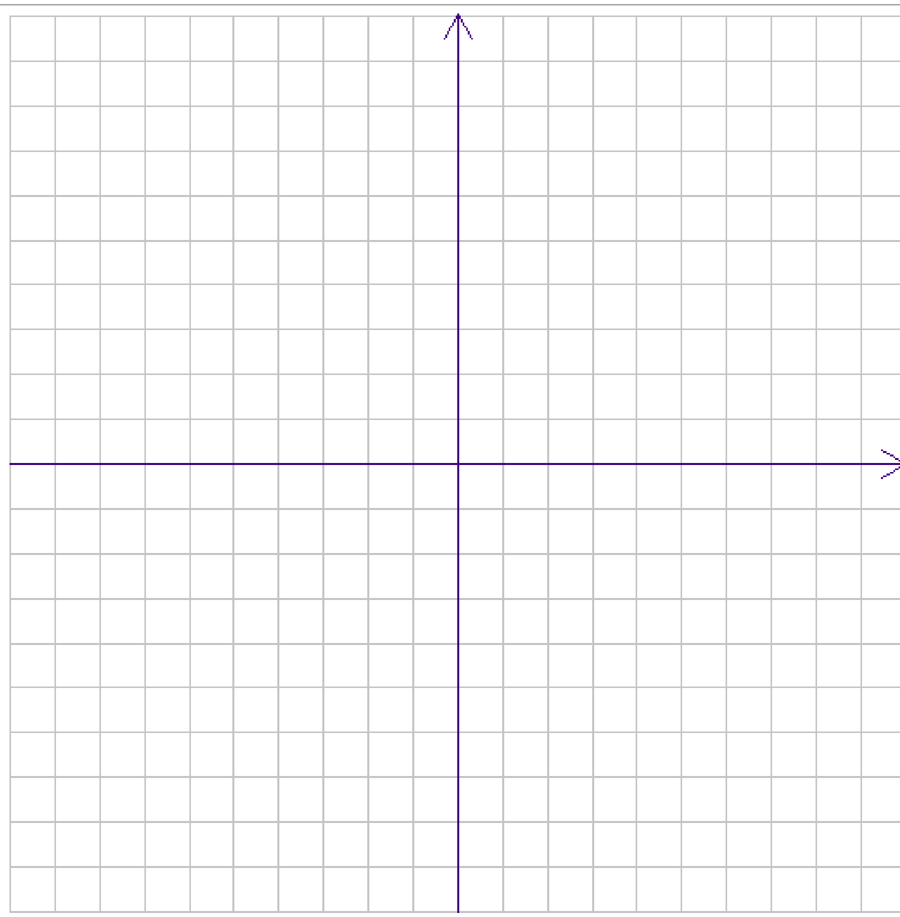
1.Calcule a área da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$ e represente graficamente.



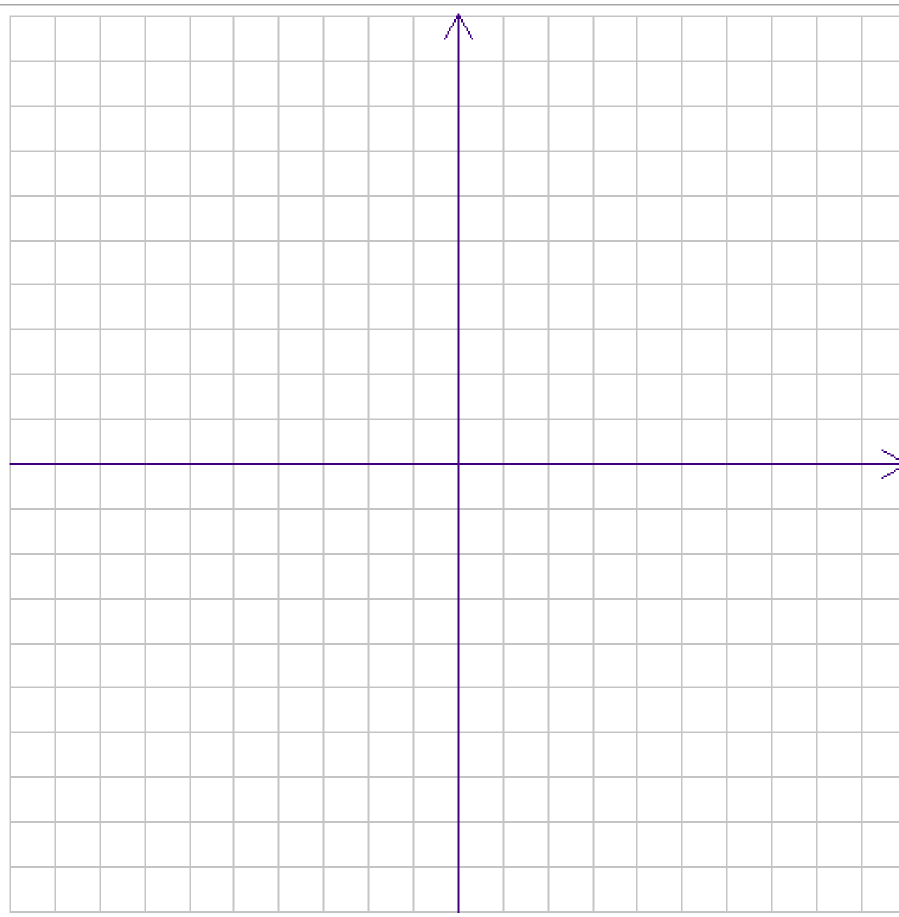
2.Calcule a área da região compreendida entre as curvas $y = x$ e $y = x^2$ e represente graficamente.



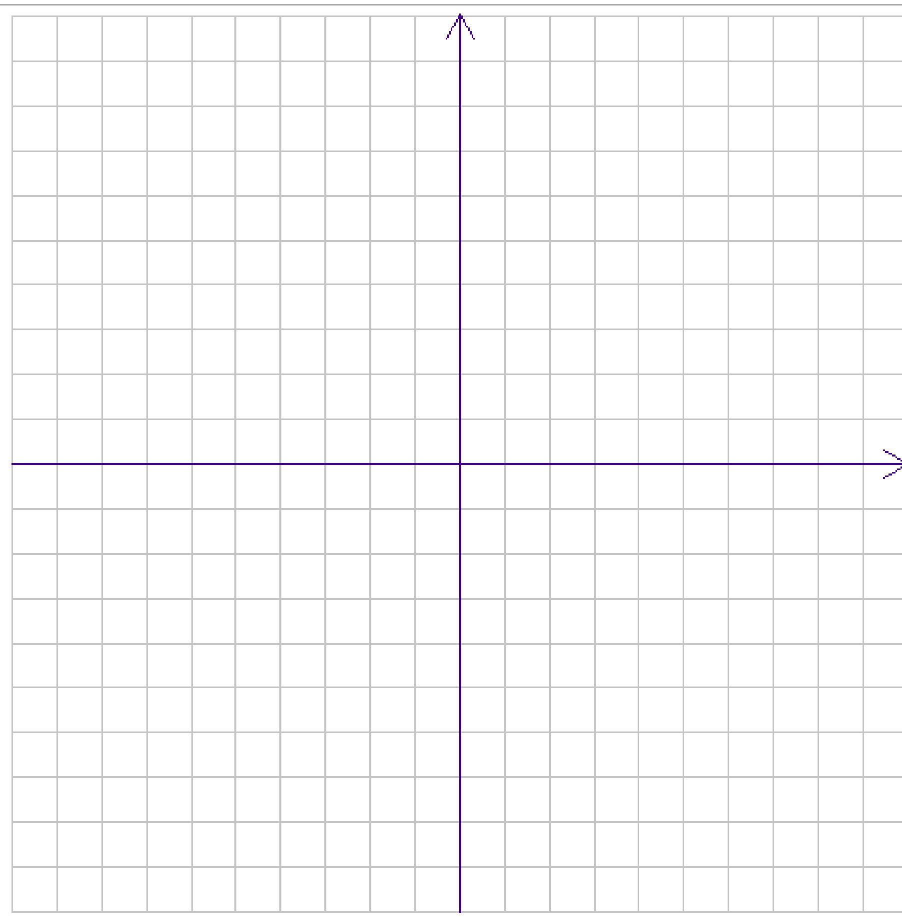
3. Calcule a área da região compreendida entre as curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$ e represente graficamente.



4.Calcule a área da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 8$ e represente graficamente.



5.Calcule a área da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ e represente graficamente.

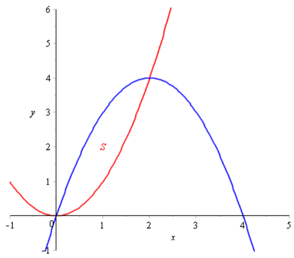


Respostas:

1.

$$\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx$$

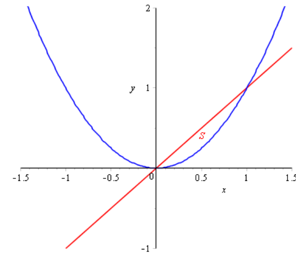
$$\frac{8}{3}$$



2.

$$\int_0^1 (x-x^2)\,dx$$

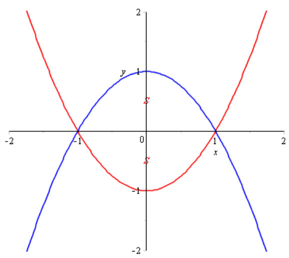
$$\frac{1}{6}$$



3.

$$2\left(\int_{-1}^1 (1-x^2)\,dx\right)$$

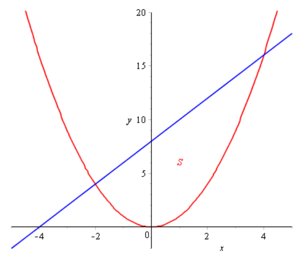
$$\frac{8}{3}$$



4.

$$\int_{-2}^4 (2x+8-x^2)\,dx$$

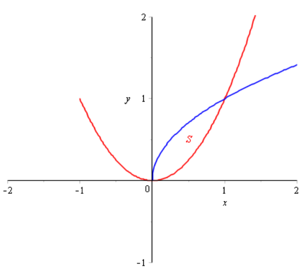
$$36$$



5.

$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

$$\frac{1}{3}$$



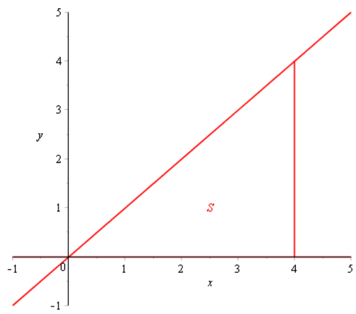
2. Sólidos de Revolução

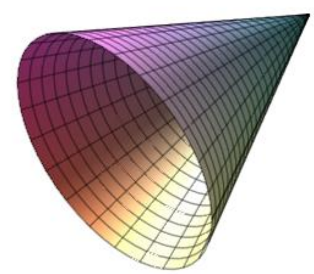
2.1. Definição

Um sólido de revolução e um sólido gerado a partir do giro de uma região plana em torno de uma reta no plano, denominada de eixo de revolução.

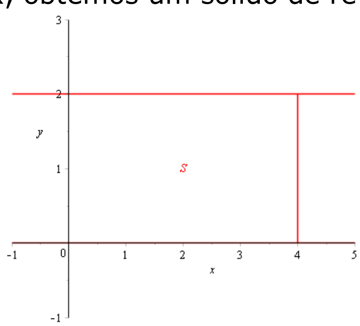
2.1.1. Exemplos

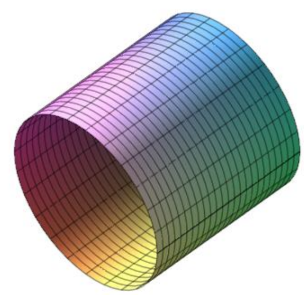
1. Ao girar a região limitada pelas retas $y=0$, $y=x$ e $x=4$ em torno do eixo dos x, obtemos um sólido de revolução denominado cone.



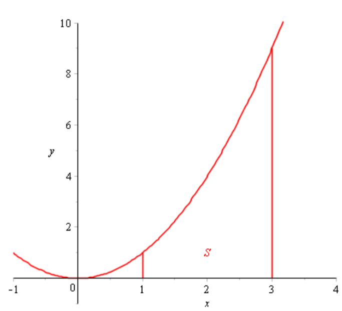


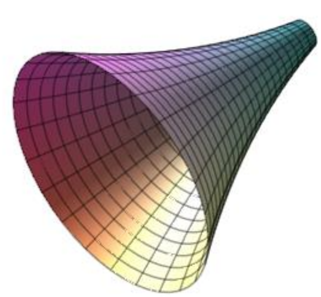
2. Ao girar a região limitada pelas retas $x=0$, $x=4$, $y=0$ e $y=2$ (retângulo) em torno do eixo dos x, obtemos um sólido de revolução denominado cilindro.





3. Ao girar a região limitada pelas retas $x=1$, $x=3$ e $y=f(x)$ em torno de um eixo, obtemos um sólido de revolução.





OBS: o eixo de revolução pode ser o eixo dos x, o eixo dos y, uma reta paralela ao eixo dos x ou uma reta paralela ao eixo dos y.

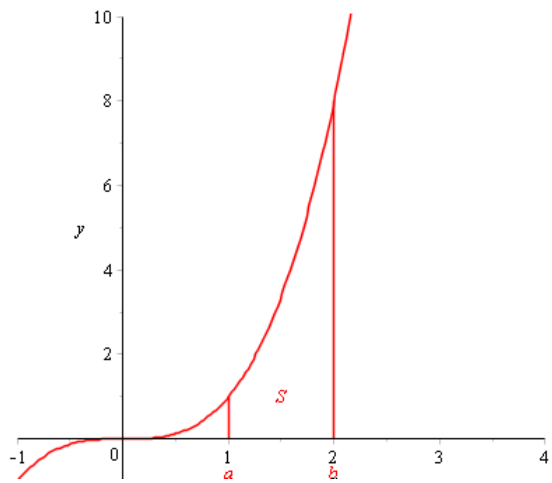
2.2. Cálculo de Volume

2.2.1. 1º Caso

<u>1ª Situação</u>: A função f é contínua no intervalo e $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$.

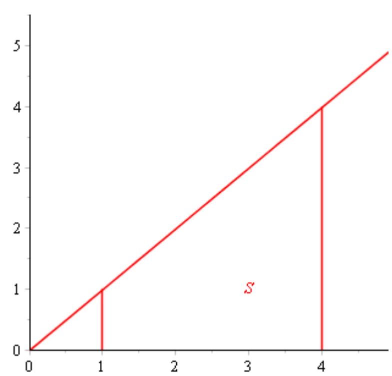
Seja S a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido, gerado pela revolução de S em torno do eixo dos x é definido por:

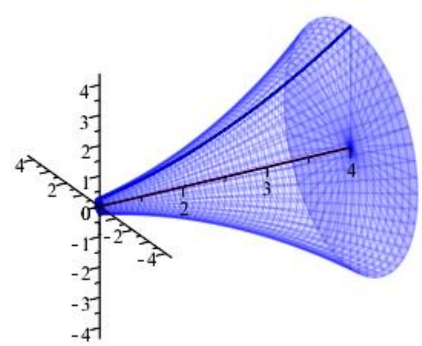
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 .dx$$



Exemplo: A região S, limitada pela curva $y = \frac{1}{4}x^2$, o eixo dos x e as retas $x = 1$ e $x = 4$, gira em torno do eixo dos x. Calcule o volume desse sólido de revolução.

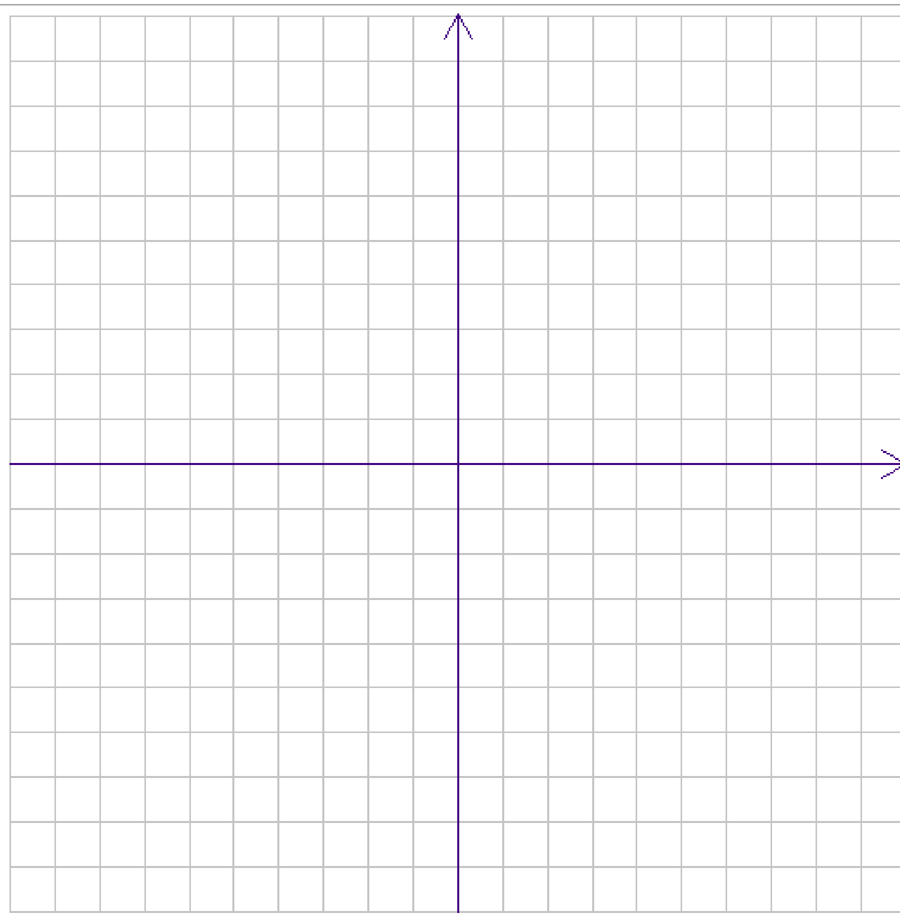
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 .dx = \pi \int_1^4 \left[\frac{1}{4}x^2\right]^2 .dx = \pi \int_1^4 \frac{1}{16}x^4 .dx = \frac{\pi}{16}.\frac{x^5}{5}\Big|_1^4 = \frac{\pi}{80}.(4^5 - 1^5) = \frac{1023\pi}{80} u.v.$$



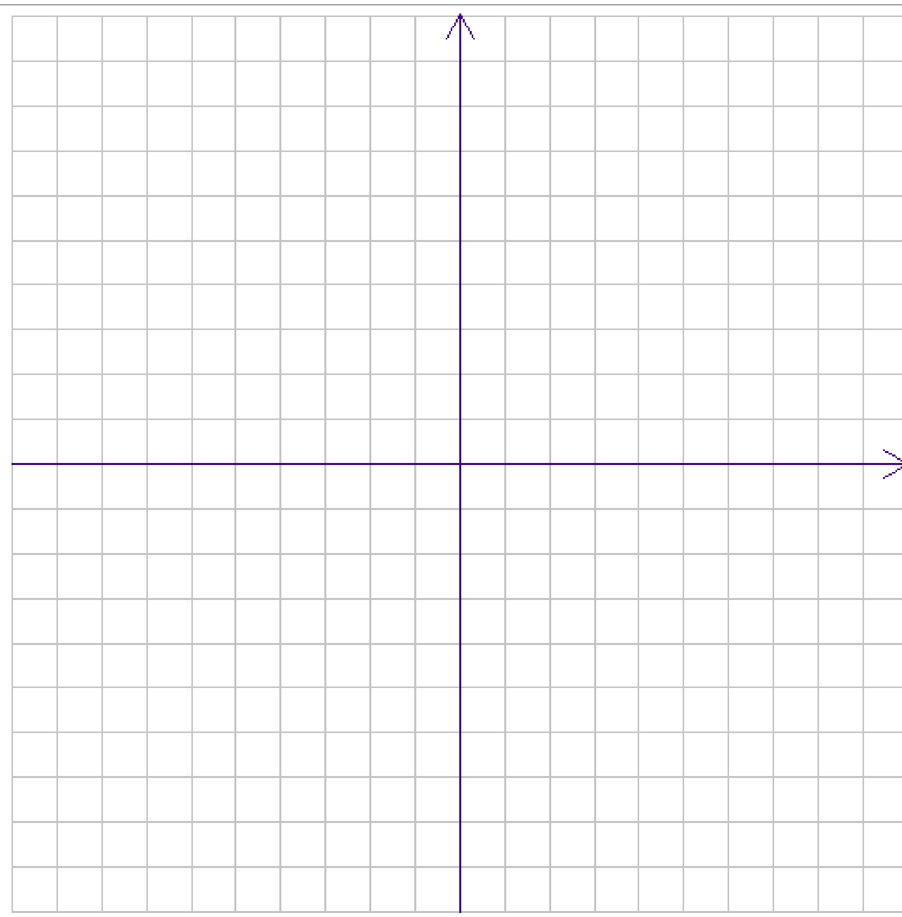


Exercícios:

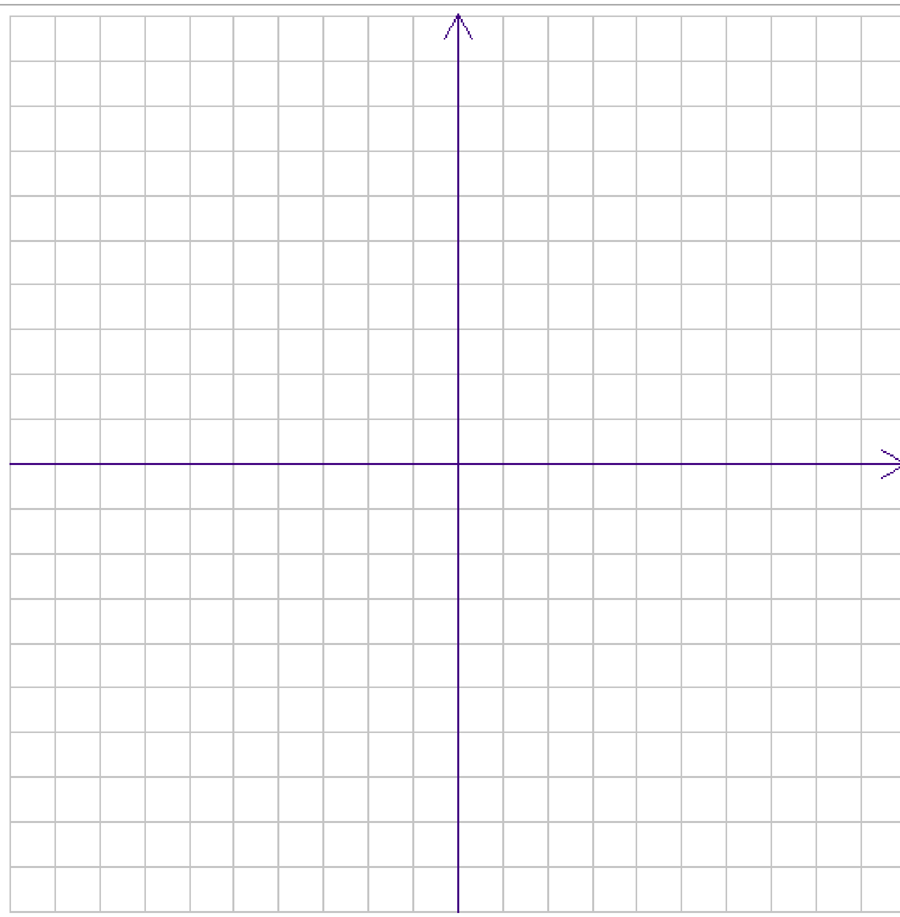
1. A curva $y = \dfrac{1}{x}$, $x \in [1,4]$, ao ser girada em torno do eixo dos x determina um sólido de revolução. Calcule o volume desse sólido e represente graficamente.



2. A reta $y = x + 1$, $x \in [0, 2]$, ao ser girada em torno do eixo dos x determina um sólido de revolução. Calcule o volume desse sólido e represente graficamente.



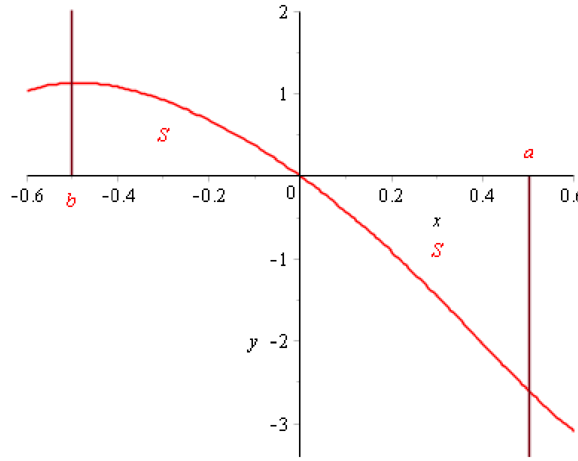
3. A curva $y = x^2$, $x \in [1,3]$, ao ser girada em torno do eixo dos x determina um sólido de revolução. Calcule o volume desse sólido e represente graficamente.



2ª Situação: A função f é contínua no intervalo e $f(x) \leq 0$ em alguns pontos de $[a,b]$.

Seja S a região sob o gráfico de f de a até b. O volume do sólido, gerado pela revolução de S em torno do eixo dos x é definido por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 .dx$$



Observe que, sendo o sólido gerado por rotação, o volume do sólido gerado pela parte do gráfico situado abaixo do eixo dos x equivale ao gerado por uma curva simétrica a ele, em relação ao eixo dos x, no mesmo intervalo. Sendo assim, a mesma fórmula do 1º caso, revolve o problema.

Exemplo: A região S, limitada pela curva $y = senx$ e o eixo dos x, gira em torno dos eixo dos x. Calcule o volume desse sólido de revolução, considerando $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$.

Calculando, por substituição, $\int \cos(2x).dx$, temos:

$u = 2x$ $\quad\quad du = 2dx$

$$\int \frac{\cos u}{2}.du = \frac{1}{2}\int \cos u.du = \frac{1}{2}.senu + c = \frac{1}{2}.sen2x + c$$

Calculando $\int sen^2 x.dx$ e, lembrando as seguintes relações trigonométricas: $sen^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ e $sen2x = 2senx\cos x$, temos:

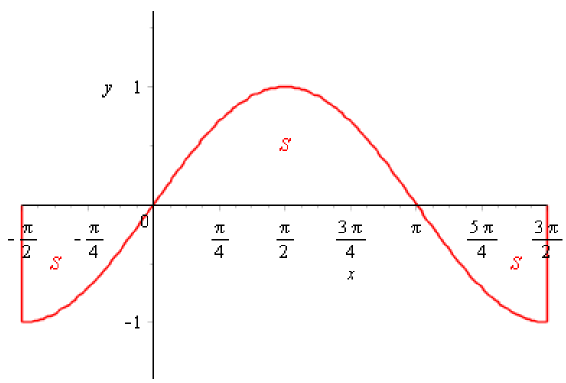
$$\int sen^2 x.dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2}.dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x).dx = \frac{1}{2}.x - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}sen2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.(sen2x) =$$
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.(2senx.\cos x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.(senx.\cos x) + c$$

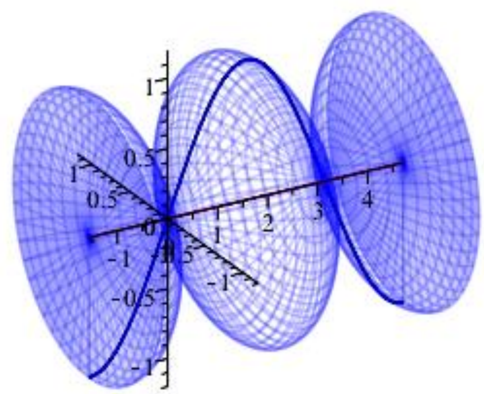
Calculando o volume:

$$V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2.dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(senx)^2.dx=\pi.\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.senx.\cos x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}=$$

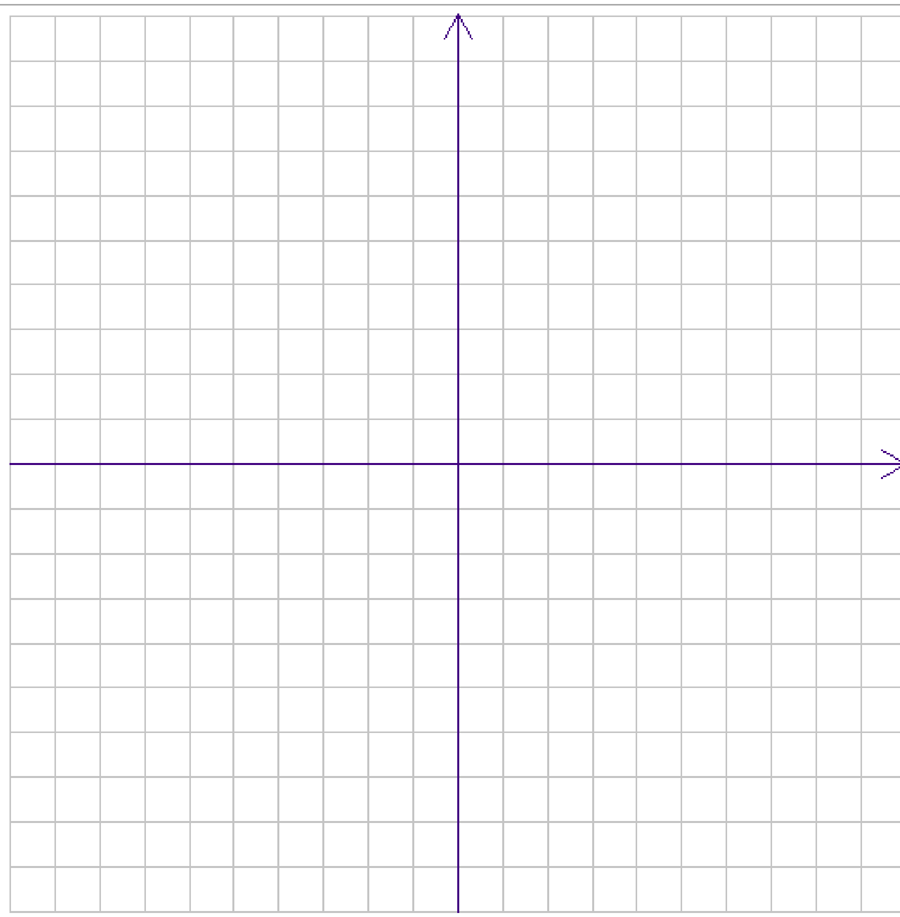
$$\pi.\left(\left(\frac{1}{2}.3\pi-\frac{1}{2}.sen3\pi.\cos 3\pi\right)-\left(\frac{1}{2}.(-\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}.sen(-\frac{\pi}{2}).\cos(-\frac{\pi}{2})\right)\right)=\pi.\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$\pi(\pi)=\pi^2u.v.$$

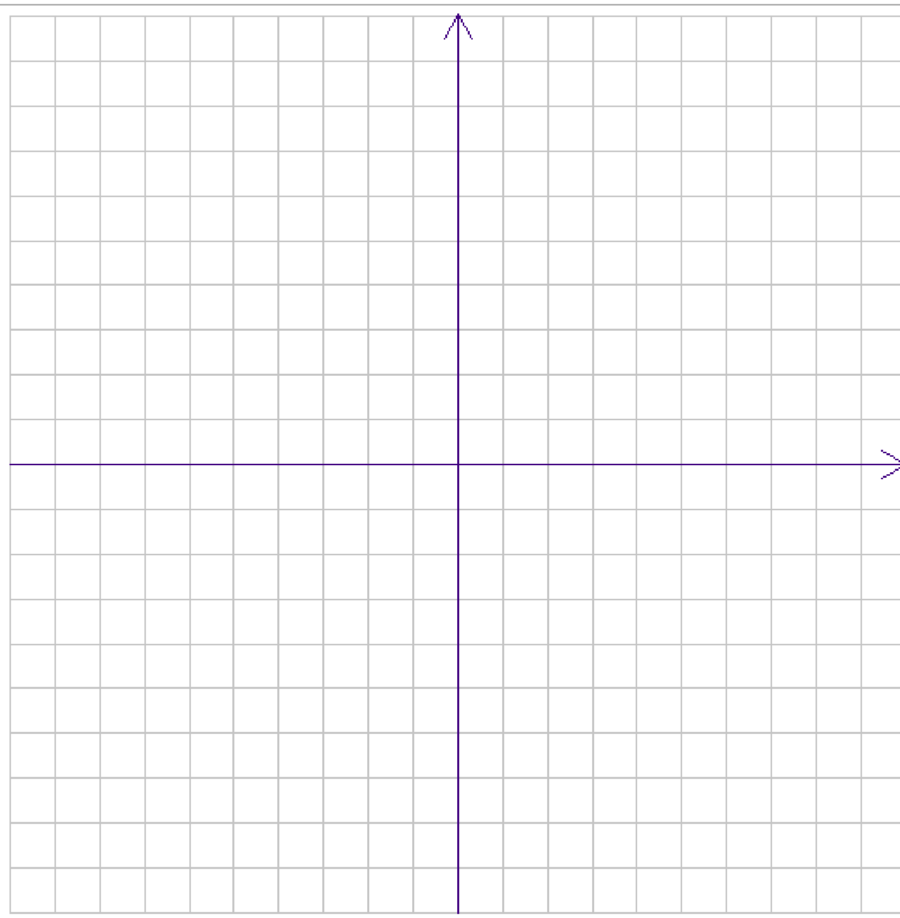




4. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = 2x - 1$, $x = 0$, $x = 4$ e $y = 0$ e represente graficamente.



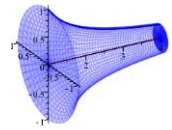
5. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$ e $y = 0$, e represente graficamente.



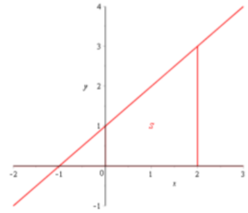
Respostas:

1.

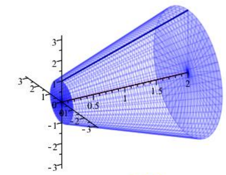
$V := \frac{3}{4}\pi$



2.

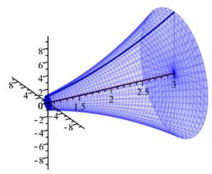


$V := \frac{26}{3}\pi$

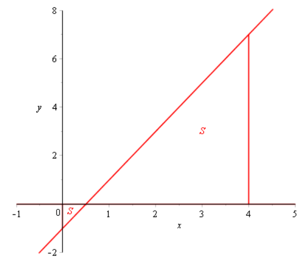


3.

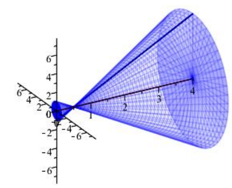
$V := \frac{242}{5}\pi$



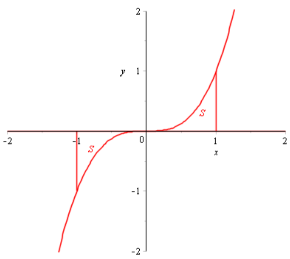
4.



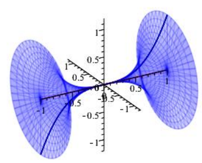
$V := \frac{172}{3}\pi$



5.



$V := \frac{2}{7}\pi$

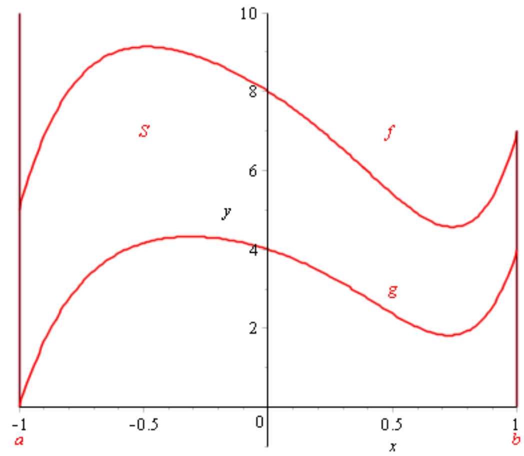


2.2.2. 2º Caso

As funções f e g são contínuas no intervalo $[a,b]$ e o sólido de revolução é gerado a partir do giro da região S compreendida entre os gráficos destas funções em torno do eixo dos x.

Seja S a região e supondo $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, o volume do sólido é dado por:

$$V = \pi \int_a^b \left(\left[f(x) \right]^2 - \left[g(x) \right]^2 \right).dx$$



Exemplo: A região S, limitada pelas curvas $y = \frac{1}{4}(13 - x^2)$, $y = \frac{1}{2}(x+5)$, gira em torno do eixo dos x. Calcule o volume desse sólido de revolução.

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right]^2 .dx = \pi \int_{-3}^{1} \left[\left(\frac{13 - x^2}{4}\right) - \left(\frac{x+5}{2}\right) \right]^2 .dx = \pi \int_{-3}^{1} \left[\left(\frac{169 - 26x^2 + x^4}{16}\right) - \left(\frac{x^2 + 10x + 25}{4}\right) \right].dx$$

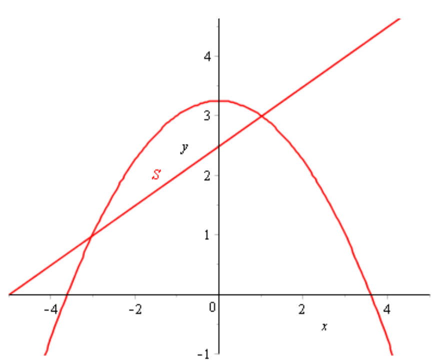
$$\pi \int_{-3}^{1} \left[\frac{169}{16} - \frac{13x^2}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{4} - \frac{5x}{2} - \frac{25}{4} \right].dx = \pi \int_{-3}^{1} \left[\frac{169 - 100}{16} - \frac{13x^2 - 2x^2}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{5x}{2} \right].dx =$$

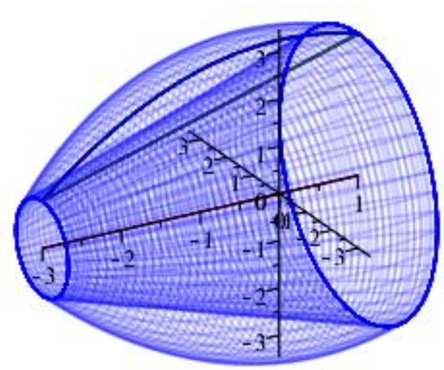
$$\pi \int_{-3}^{1} \left[\frac{69}{16} - \frac{15x^2}{8} + \frac{x^4}{16} - \frac{5x}{2} \right].dx = \pi \left(\frac{69}{16}.x - \frac{15}{8}.\frac{x^3}{3} + \frac{1}{16}.\frac{x^5}{5} - \frac{5}{2}.\frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{1} = \pi \left(\frac{69}{16}.x - \frac{15}{24}.x^3 + \frac{1}{80}.x^5 - \frac{5}{4}.x^2 \right) \Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \pi \left(\left(\frac{69}{16}.1 - \frac{15}{24}.1^3 + \frac{1}{80}.1^5 - \frac{5}{4}.1^2 \right) - \left(\left(\frac{69}{16}.(-3) - \frac{15}{24}.(-3)^3 + \frac{1}{80}.(-3)^5 - \frac{5}{4}.(-3)^2 \right) \right) \right) =$$

$$= \pi \left(\frac{69}{16} - \frac{15}{24} + \frac{1}{80} - \frac{5}{4} - \left(-\frac{207}{16} + \frac{405}{24} - \frac{243}{80} - \frac{45}{4} \right) \right) = \pi \left(\frac{69}{16} - \frac{15}{24} + \frac{1}{80} - \frac{5}{4} + \frac{207}{16} - \frac{405}{24} + \frac{243}{80} + \frac{45}{4} \right) =$$

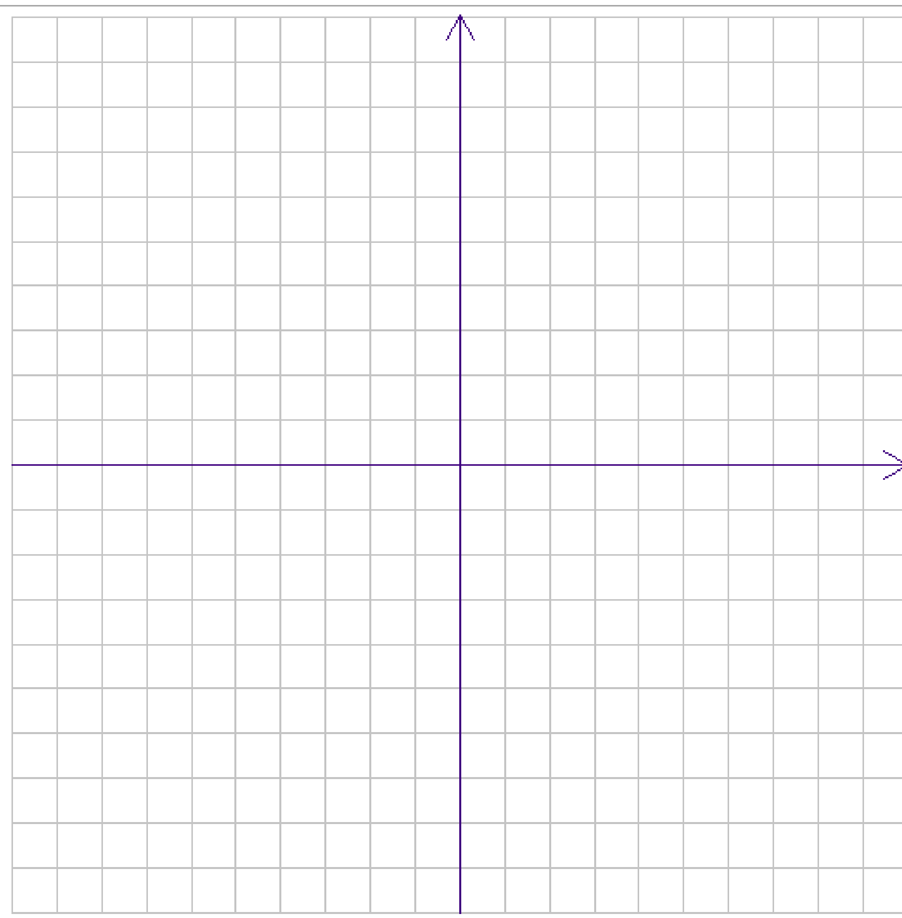
$$\pi \left(\frac{276}{16} - \frac{420}{24} + \frac{244}{80} + \frac{40}{4} \right) = \pi \left(\frac{4140 - 4200 + 732 + 2400}{240} \right) = \frac{3072}{240}\pi = \frac{64}{5}\pi u.v.$$



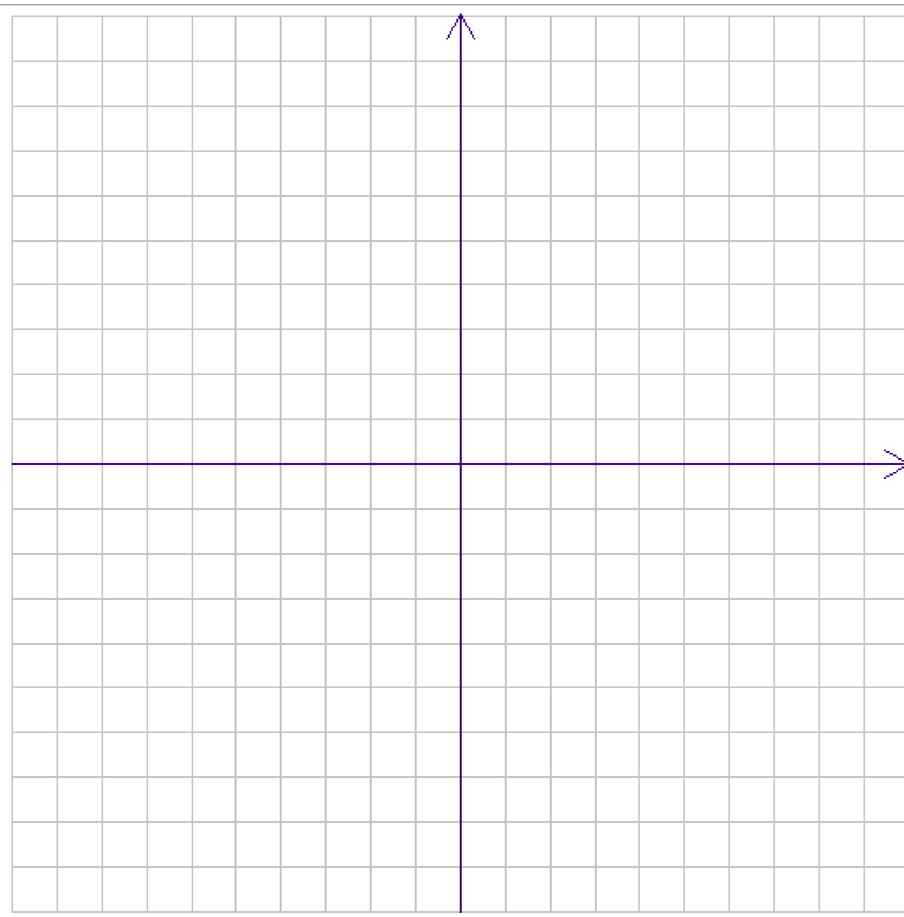


Exercícios:

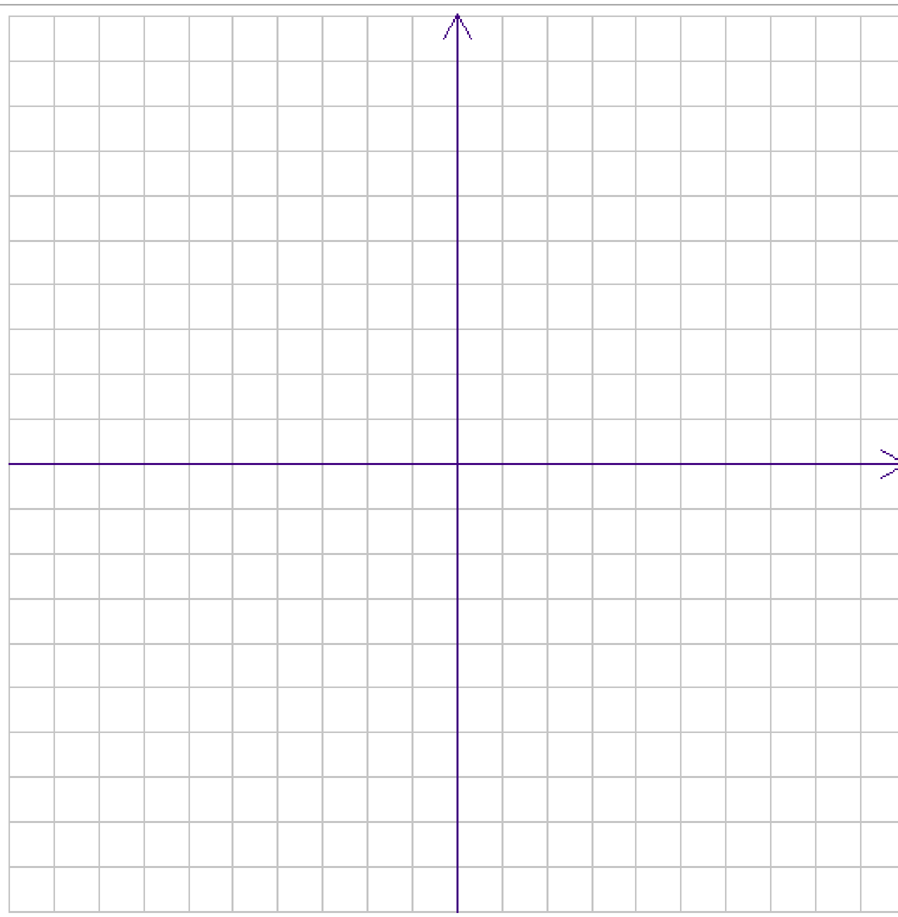
1. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = x^2$ e $y = x^3$ e represente graficamente.



2. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = x^2$ e $y = x + 2$ e represente graficamente.

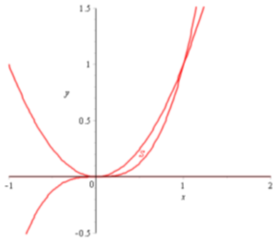


3. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos x, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = x^3$ e $y = x$ e represente graficamente.

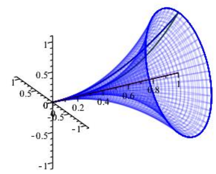


Respostas:

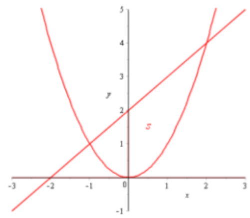
1.



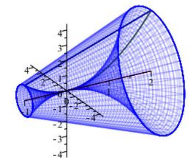
$V := \frac{2}{35}\pi$



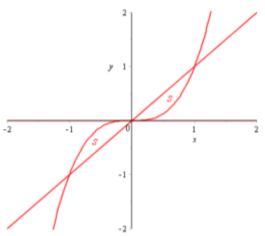
2.



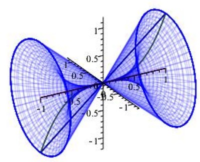
$V := \frac{72}{5}\pi$



3.



$V := \frac{8}{21}\pi$

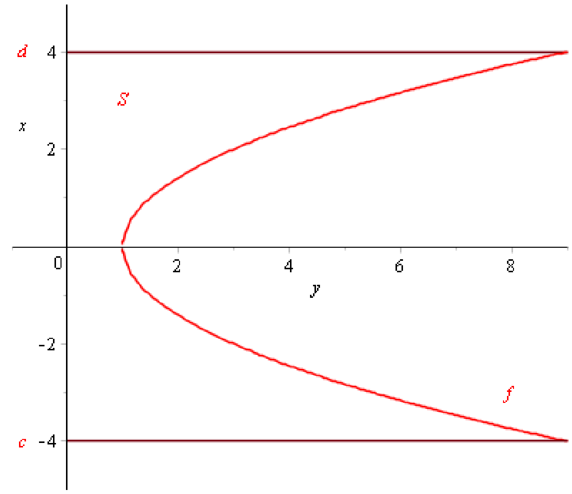


2.2.3. 3º Caso

A função $g(y)$ é contínua no intervalo $[c,d]$ e S gira em torno do eixo dos y.

Seja S a região, o volume do sólido é dado por:

$$V=\pi\int_c^d [g(y)]^2 .dy$$



Exemplo: A região S, limitada pela curva $y=x^3$, pelo eixo dos y e pela reta $y=8$, gira em torno do eixo dos y. Calcule o volume desse sólido de revolução.

Calculando $g(y)$:

$$y=x^3$$

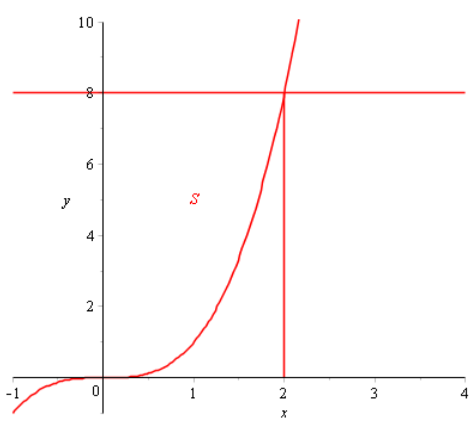
$$(y)^{\frac{1}{3}}=\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

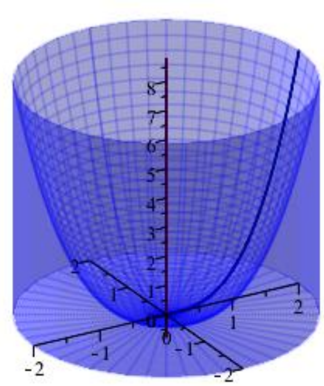
$$y^{\frac{1}{3}}=x$$

$$g(y)=y^{\frac{1}{3}}$$

Calculando o volume:

$$V=\pi\int_c^d [g(y)]^2 .dy=\pi\int_0^8 (\sqrt[3]{y})^2.dx=\pi\int_0^8 \left[y^{\frac{1}{3}}\right]^2 .dx=\pi\int_0^8 y^{\frac{2}{3}}.dx=\pi(\frac{y^{\frac{5}{3}}}{5/3})\Bigg|_0^8=\frac{3}{5}.\pi.y^{\frac{5}{3}}\Bigg|_0^8=\frac{3}{5}.\pi.(8^{\frac{5}{3}}-0^{\frac{5}{3}})=\frac{96}{5}.\pi u.v.$$





Outra maneira de resolução é calcular o volume do cilindro, gerado pela rotação no intervalo 0 a 2 [a,b], em torno do eixo dos y e subtrair o volume do sólido de revolução gerado pela rotação, no mesmo intervalo, da curva $y = x^3$, ao redor do eixo dos y. Nesse caso, a fórmula é dada por: $V = 2\pi \int_a^b x.f(x).dx$.

No exemplo dado, temos:

Volume do cilindro:

$V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi 2^2 8 = 32\pi$.

Volume do sólido de revolução:

$V_{sólido} = 2\pi \int_a^b x.f(x).dx = 2\pi \int_0^2 x.x^3.dx = 2\pi \int_0^2 x^4.dx = 2\pi \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{2}{5}\pi 2^5 = \frac{64}{5}\pi$, que é o volume abaixo do gráfico da curva $y = x^3$.

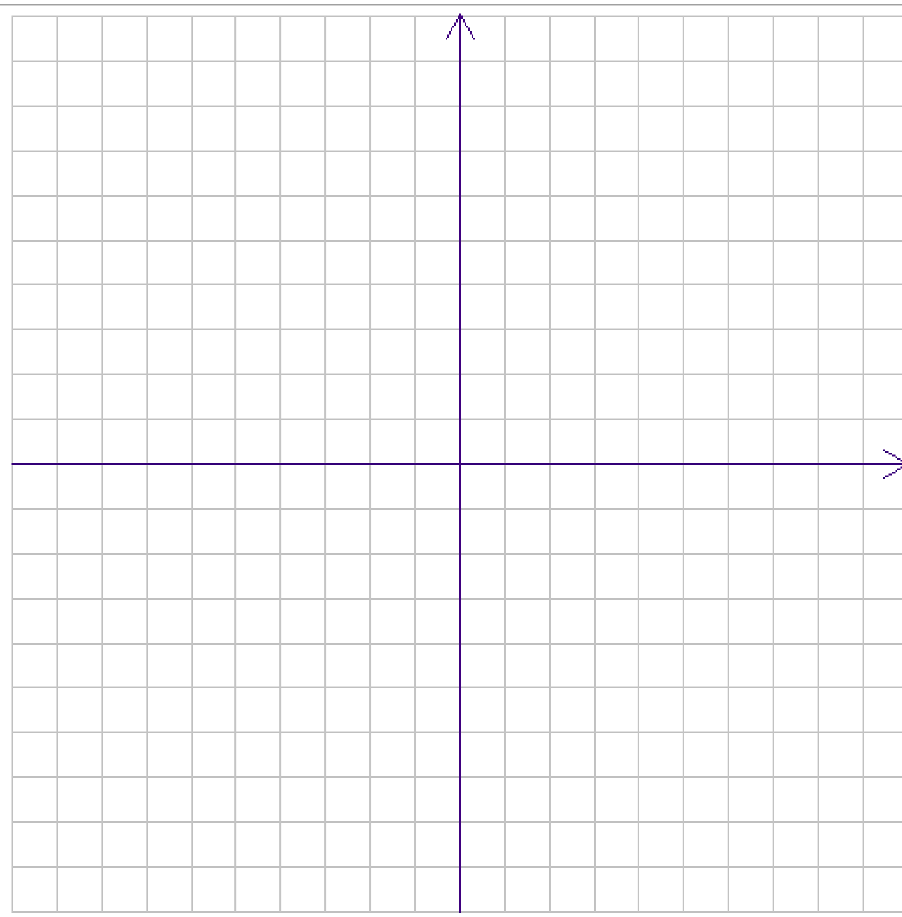
Volume Total:

$V_{total} = V_{cilindro} - V_{sólido}$

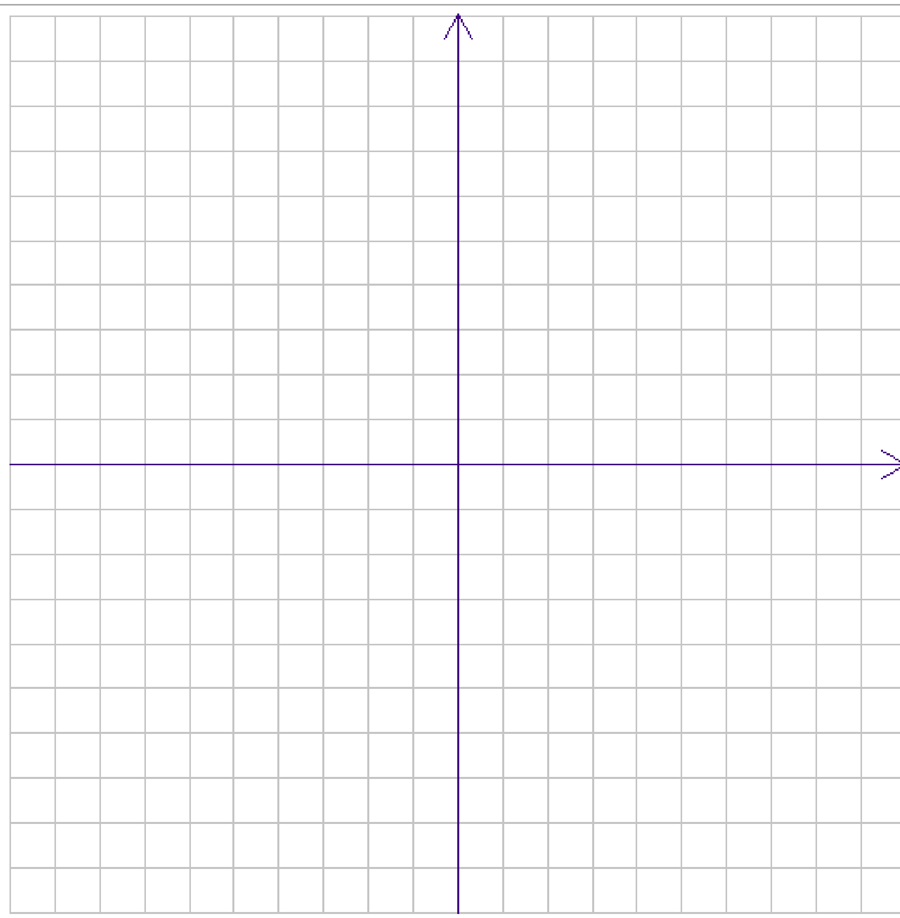
$V_{total} = 32\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{160\pi - 64\pi}{5} = \frac{96\pi}{5} u.v.$

Exercícios:

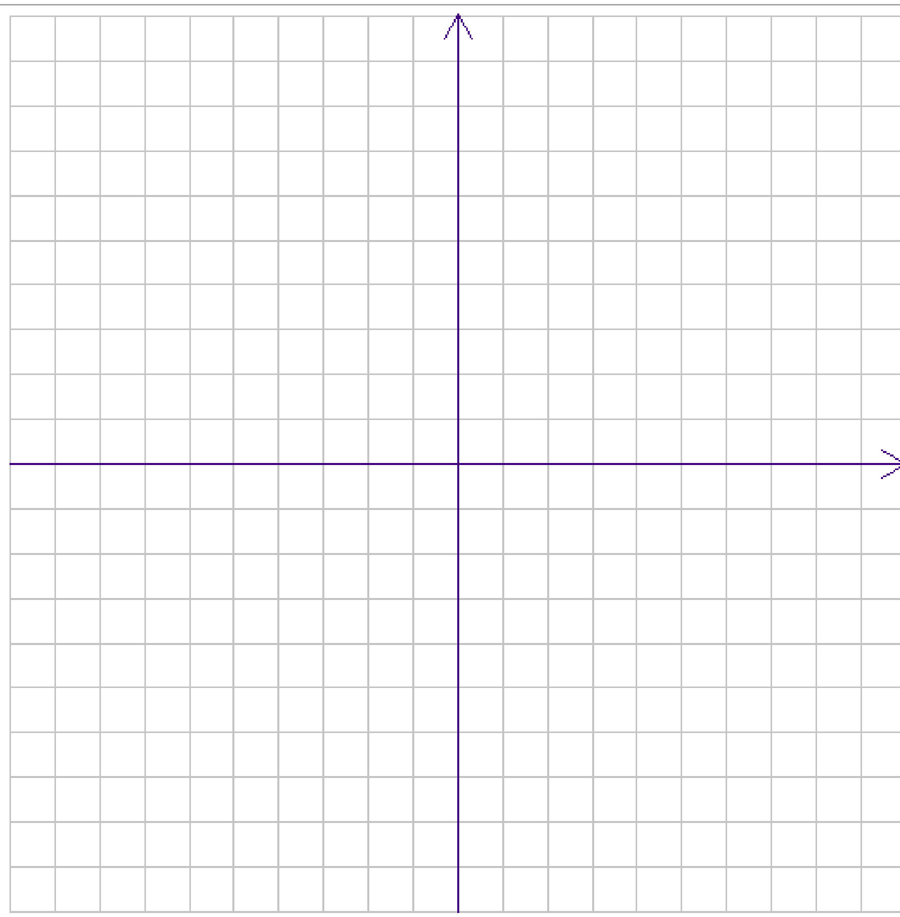
1. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos y, da região S delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt[3]{x}$ e o eixo dos x, sendo $x \in [0,8]$ e represente graficamente.



2. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos y, da região S delimitada pelo gráfico da equação $y = x^2 - 1$ e pelo eixo dos x, sendo $x \in [1, 2]$ e represente graficamente.

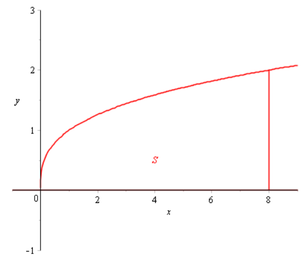


3. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos y, da região S delimitada pelos gráficos das equações $y = \sqrt{x}$ e $y = 1$, sendo $x \in [1,4]$ e represente graficamente.

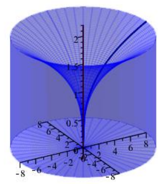


Respostas:

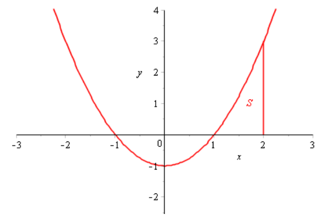
1.



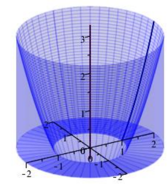
$\frac{768}{7}\pi$



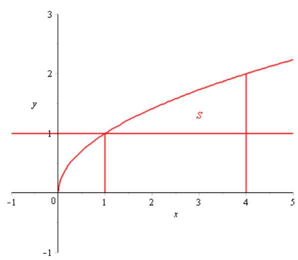
2.



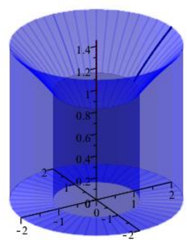
$\frac{9}{2}\pi$



3.



$\frac{49}{5}\pi$



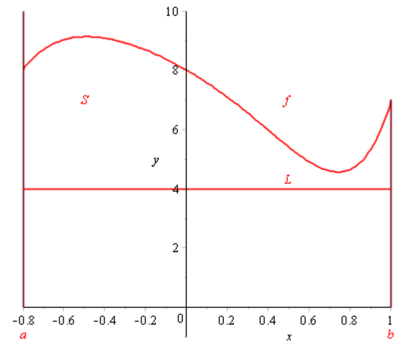
2.2.4. 4º Caso

A função f é contínua no intervalo de $[a,b]$ e o gráfico da função $y = f(x)$ gira ao redor de uma reta paralela a um dos eixos cartesianos.

a. O eixo de revolução é paralelo ao eixo dos x (reta $y = L$)

Seja S a região o volume do sólido é dado por

$$V = \pi\int_a^b \left[f(x) - L \right]^2 .dx$$



Exemplo: A região S, limitada pelos gráficos de $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 4$ e $x = 4$, gira em torno do da reta $y = 4$. Calcule o volume desse sólido de revolução.

Ponto de intersecção com a reta L: $\dfrac{1}{x} = 4 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$

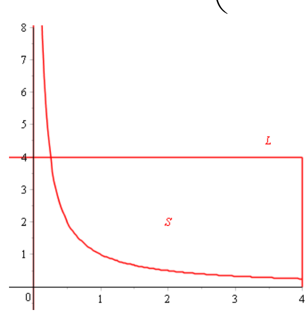
$$V = \pi\int_a^b \left[f(x) - L \right]^2 .dx = \pi\int_{\frac{1}{4}}^{4} \left(\frac{1}{x} - 4 \right)^2 .dx = \pi\int_{\frac{1}{4}}^{4} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{8}{x} + 16 \right).dx$$

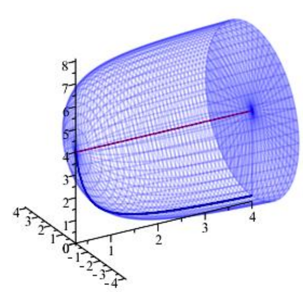
$$\pi\int_{\frac{1}{4}}^{4} \left(x^{-2} - 8x^{-1} + 16 \right).dx = \pi\left(\frac{x^{-1}}{-1} - 8.\ln x + 16.x \right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{4} = \pi\left(-\frac{1}{x} - 8.\ln x + 16.x \right)\Bigg|_{\frac{1}{4}}^{4}$$

$$= \pi\left(\left(-\frac{1}{4} - 8.\ln 4 + 16.4 \right) - \left(-\frac{1}{\frac{1}{4}} - 8.\ln\frac{1}{4} + 16.\frac{1}{4} \right) \right) = \pi\left(-\frac{1}{4} - 8.\ln 4 + 64 + 4 + 8.\ln\frac{1}{4} - 4 \right)$$

$$= \pi\left(-\frac{1+256}{4} - 8.\ln 4 + 8.\ln\frac{1}{4} \right) = \pi\left(\frac{255}{4} - 8.\ln 4 + 8.\ln\frac{1}{4} \right) =$$

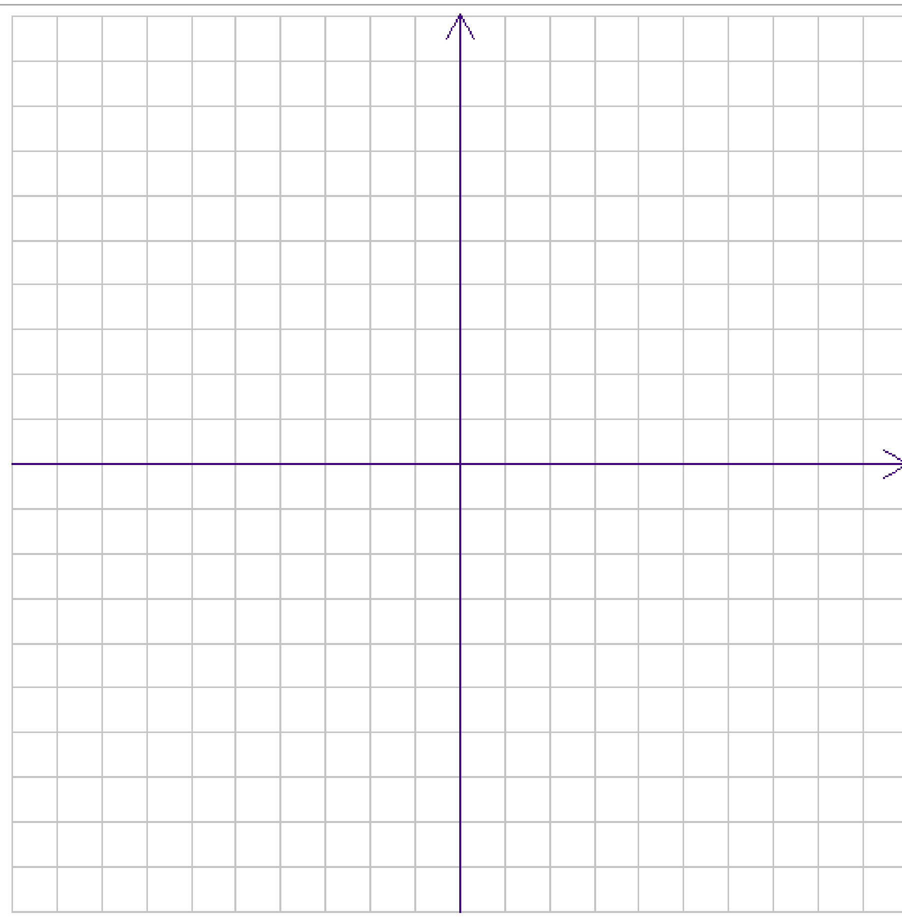
$$\pi\left(\frac{255}{4} - 8.(\ln 4 - \ln\frac{1}{4}) \right) = \pi\left(\frac{255}{4} - 8.(\frac{\ln 4}{\ln 1/4}) \right) = \pi\left(\frac{255}{4} - 8.\ln 16 \right) u.v.$$



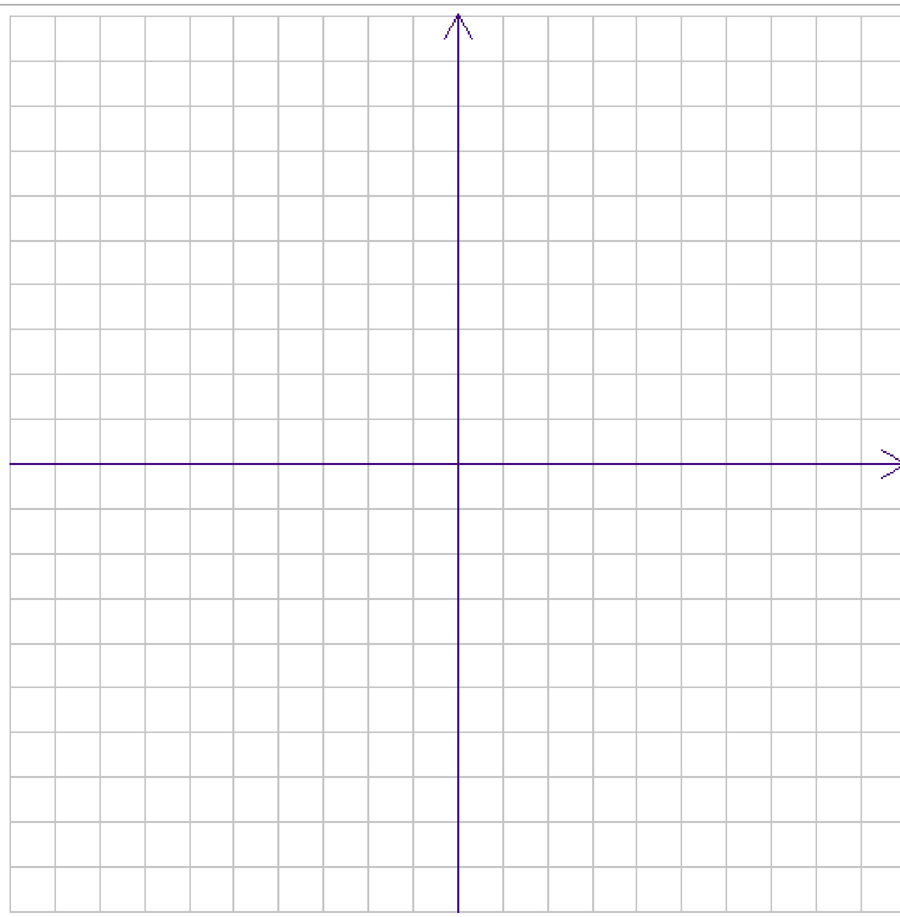


Exercícios:

1. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo $y = 2$, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = 2x^2$, $y = 2$, $x = 2$ e $x = 1$ e represente graficamente.

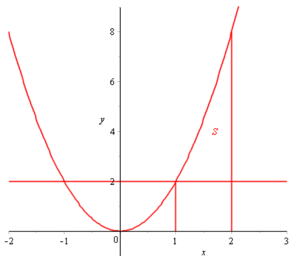


2. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo $y = 2$, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = 3 + x^2$, $y = 2$, $x = -2$ e $x = 2$ e represente graficamente.

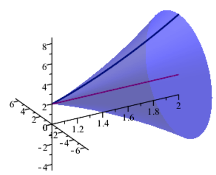


Respostas:

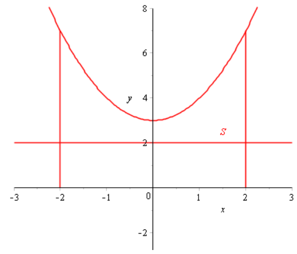
1.



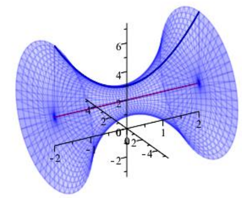
$\frac{152}{15}\pi$



2.



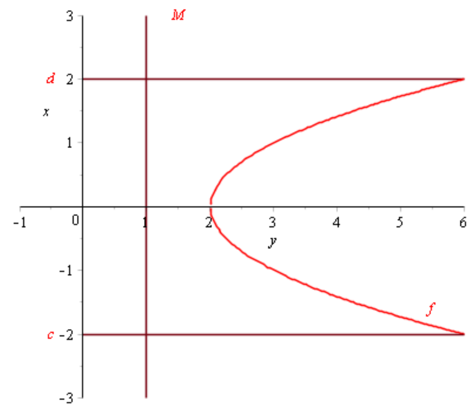
$\frac{412}{15}\pi$



b. O eixo de revolução é paralelo ao eixo dos y (reta $x = M$)

Seja S a região o volume do sólido é dado por

$$V = \pi\int_c^d \left[g(y) - M\right]^2 .dy$$



Exemplo: A região S, limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{2x-2}$, $x = -1$, $y = 2$ e $y = 0$, gira em torno do da reta $x = -1$. Calcule o volume desse sólido de revolução.

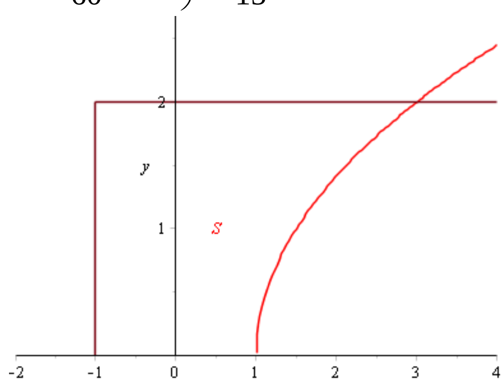
Calculando $g(y)$:

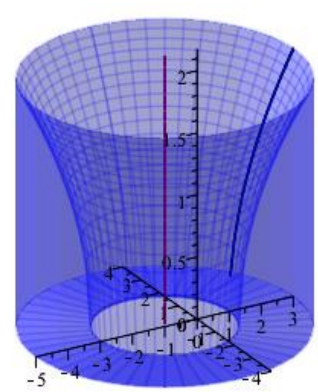
$$y = \sqrt{2x-2}$$
$$(y)^2 = \left(\sqrt{2x-2}\right)^2$$
$$y^2 = 2x - 2$$
$$x = \frac{y^2+2}{2}$$
$$g(y) = \frac{y^2}{2} + 1$$

$$V = \pi\int_c^d \left[g(x) - M\right]^2 .dy = \pi\int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + 1 - (-1)\right)^2 .dy = \pi\int_0^2 \left(\frac{1}{2}y^2 + 2\right)^2 .dx = \pi\int_0^2 \left(\frac{1}{4}y^4 + 2y^2 + 4\right).dx =$$

$$\pi\left(\frac{1}{4}.\frac{y^5}{5} + 2.\frac{y^3}{3} + 4.y\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{1}{20}.y^5 + \frac{2}{3}.y^3 + 4.y\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{1}{20}.2^5 + \frac{2}{3}.2^3 + 4.2\right) = \pi\left(\frac{32}{20} + \frac{16}{3} + 8\right) =$$

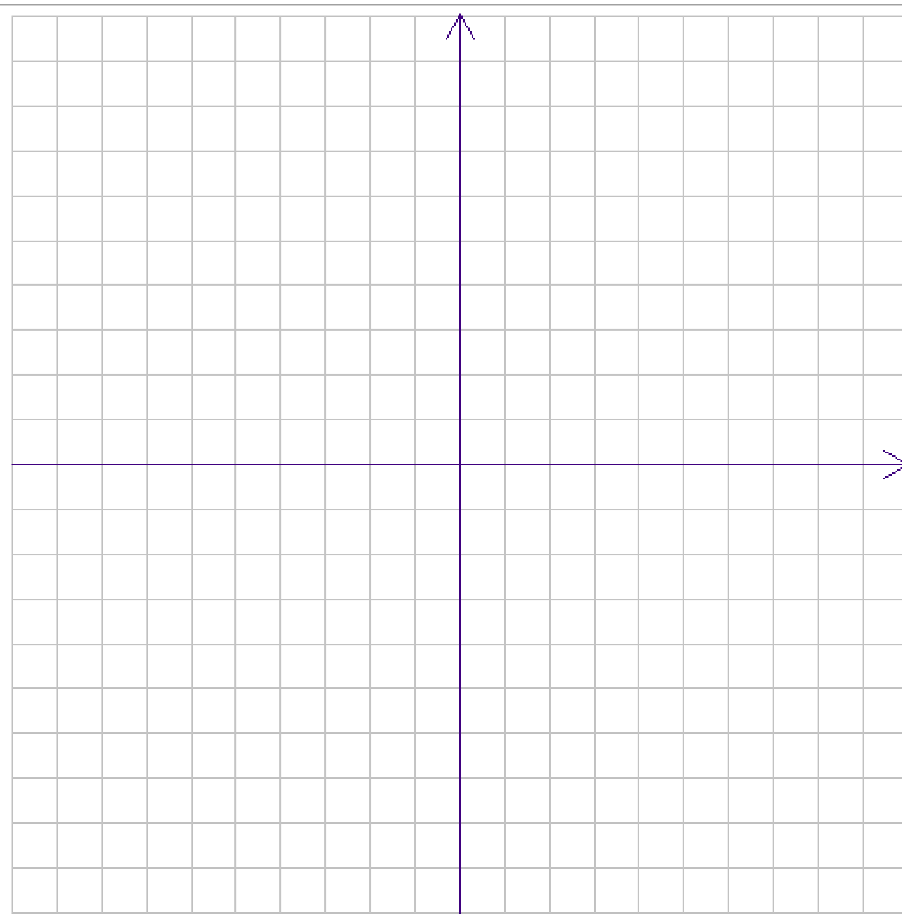
$$\pi\left(\frac{96+320+480}{60}\right) = \frac{224}{15}\pi u.v.$$





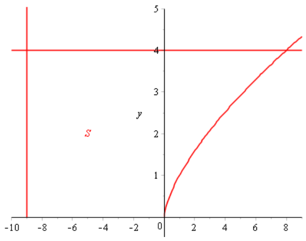
Exercícios:

1. Determinar o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo $x = -9$, da região S delimitada pelos gráficos das equações dadas: $y = x^{\frac{2}{3}}$, $x = -9$, $y = 0$ e $y = 4$, e represente graficamente.

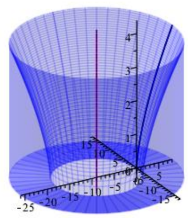


Respostas:

1.



$\frac{3092}{5}\pi$



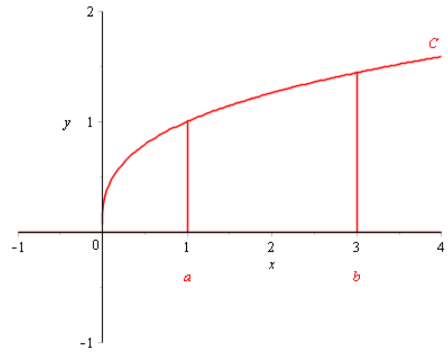
2.3. Cálculo de Área

2.3.1. 1º Caso

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, em que f e $f\,'$ são funções contínuas no intervalo $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo dos x, é definida por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f\,'(x)\right]^2}.dx$$



Exemplo: Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos x, da curva dada por $y = 4\sqrt{x}$, $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$.

$$f(x) = 4\sqrt{x} \Rightarrow f(x) = 4x^{\frac{1}{2}}$$

$$f\,'(x) = 4.\frac{1}{2}.x^{\frac{1}{2}-1} = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

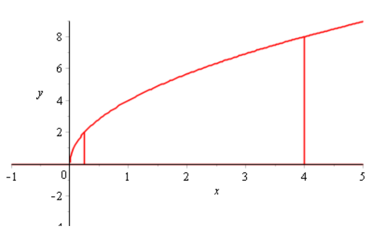
$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left[f\,'(x)\right]^2}.dx = 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x}.\sqrt{1+\left[\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}\right]^2}.dx = 2\pi \int_{1/4}^{4} 4\sqrt{x}.\sqrt{1+\frac{4}{x}}.dx =$$

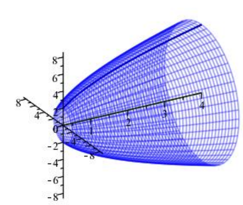
$$8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x}.\sqrt{\frac{x+4}{x}}.dx == 8\pi \int_{1/4}^{4} \sqrt{x}.\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}}.dx = 8\pi \int_{1/4}^{4} (x+4)^{\frac{1}{2}}.dx = 8\pi \left.\frac{(x+4)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right|_{1/4}^{4} =$$

$$\left.\frac{16}{3}\pi(x+4)^{\frac{3}{2}}\right|_{1/4}^{4} = \frac{16}{3}\pi\left[(4+4)^{\frac{3}{2}} - (\frac{1}{4}+4)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{16}{3}\pi\left[(8)^{\frac{3}{2}} - (\frac{1+16}{4})^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$\frac{16}{3}\pi\left[(8)^{\frac{3}{2}} - (\frac{17}{4})^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{16}{3}\pi\left[\sqrt{512} - \sqrt{\frac{17^3}{4^3}}\right] = \frac{16}{3}\pi\left[16\sqrt{2} - \frac{17\sqrt{17}}{8}\right] =$$

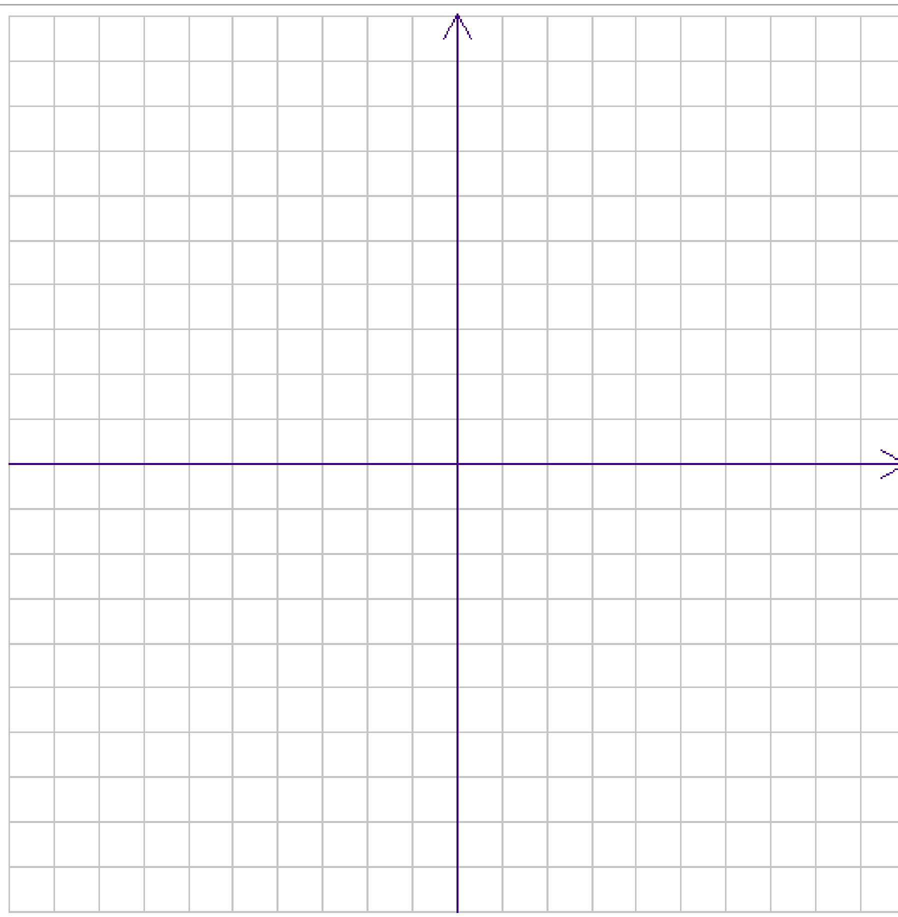
$$\frac{1}{3}\pi\left[256\sqrt{2} - 34\sqrt{17}\right] = \frac{1}{3}\pi\left[128\sqrt{2} - 17\sqrt{17}\right]u.a.$$



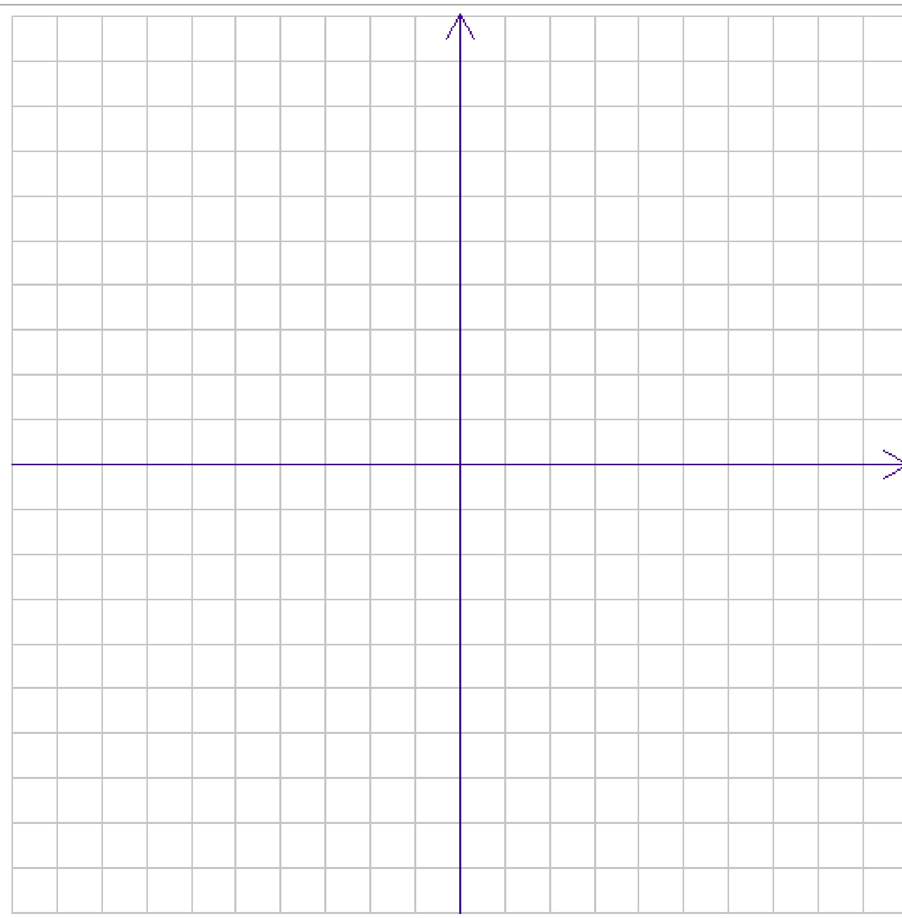


Exercícios:

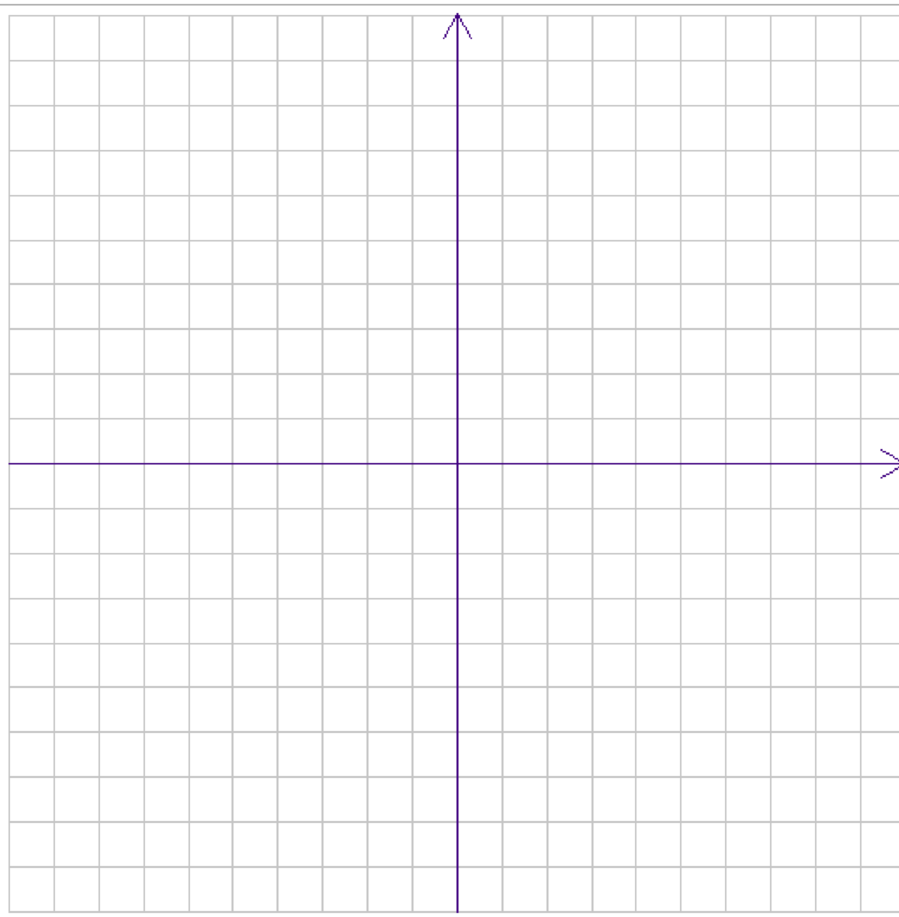
1. Determinar a área da superfície gerada pela rotação da curva dada por $y = 2x^3$, em torno do eixo x, no intervalo $0 \le x \le 2$.



2. Determinar a área da superfície gerada pela rotação da curva dada por $y=\sqrt{4-x^2}$, em torno do eixo x, no intervalo $0 \leq x \leq 2$.

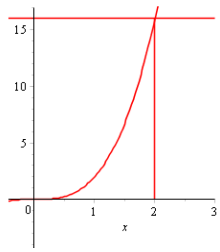


3. Determinar a área da superfície gerada pela rotação da curva dada por $y = \frac{1}{2}x$, em torno do eixo x, no intervalo $0 \le x \le 4$.

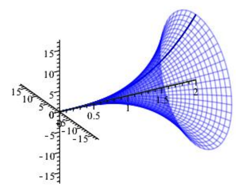


Respostas:

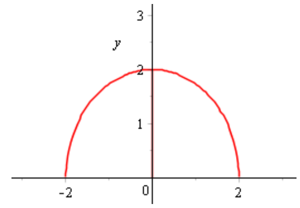
1.



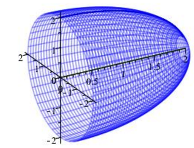
$$\frac{1}{54}\pi\left(577\sqrt{577}-1\right)$$



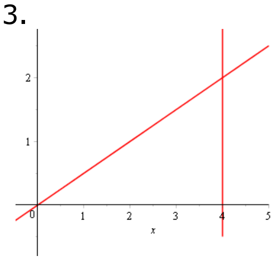
2.



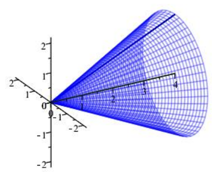
$$8\pi$$



3.



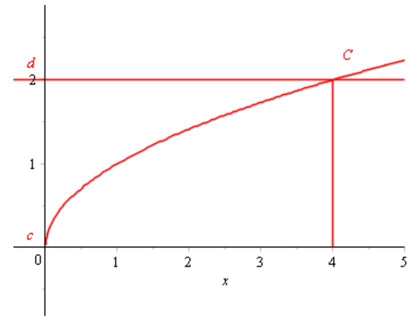
$$4\pi\sqrt{5}$$



2.3.2. 2º Caso

Seja C uma curva de equação $y = f(x)$, em que f e f' são funções contínuas no intervalo $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

A área da superfície de revolução S, gerada pela rotação da curva C ao redor do eixo dos y, é definida por:



$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}.dy$$

Exemplo: Calcular a área da superfície de revolução obtida pela rotação, em torno do eixo dos y, da curva dada por $y = x^{\frac{1}{3}}$, $0 \leq x \leq 1$.

Calculando $g(y)$:

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$

$$(y)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$$

$$y^3 = x$$

$$g(y) = y^3$$

$$g(y) = y^3$$
$$g'(y) = 3y^2$$

$$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}.dy = 2\pi \int_0^1 y^3.\sqrt{1+(3y^2)^2}.dy = 2\pi \int_0^1 y^3.\sqrt{1+9y^4}.dy$$

Calculando a integral $\int y^3.\sqrt{1+9y^4}.dy$, por substituição:

$u = 1+9y^4$ $\qquad$ $du = 36y^3dy$

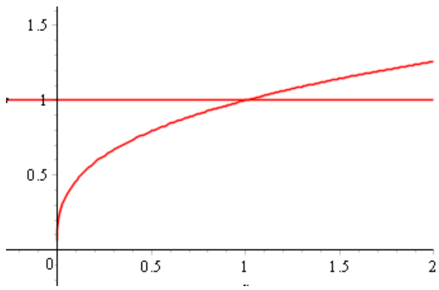
$$\int y^3.\sqrt{1+9y^4}.dy = \int \frac{\sqrt{u}}{36}du = \frac{1}{36}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{36}.\frac{2}{3}.u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{54}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{54}(1+9y^4)^{\frac{3}{2}} + c$$

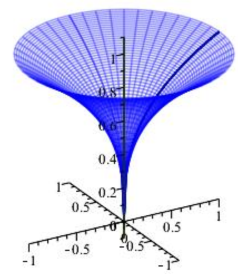
Substituindo a integral, temos:

$$A = 2\pi\int_0^1 y^3.\sqrt{1+9y^4}.dy = 2\pi\frac{1}{54}(1+9y^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$\frac{\pi}{27}\left[(1+9.1^4)^{\frac{3}{2}} - (1+9.0^4)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{\pi}{27}\left[(10)^{\frac{3}{2}} - (1)^{\frac{3}{2}}\right] =$$

$$\frac{\pi}{27}\left[\sqrt{10^3} - 1\right] = \frac{\pi}{27}\left[10\sqrt{10} - 1\right]u.a.$$

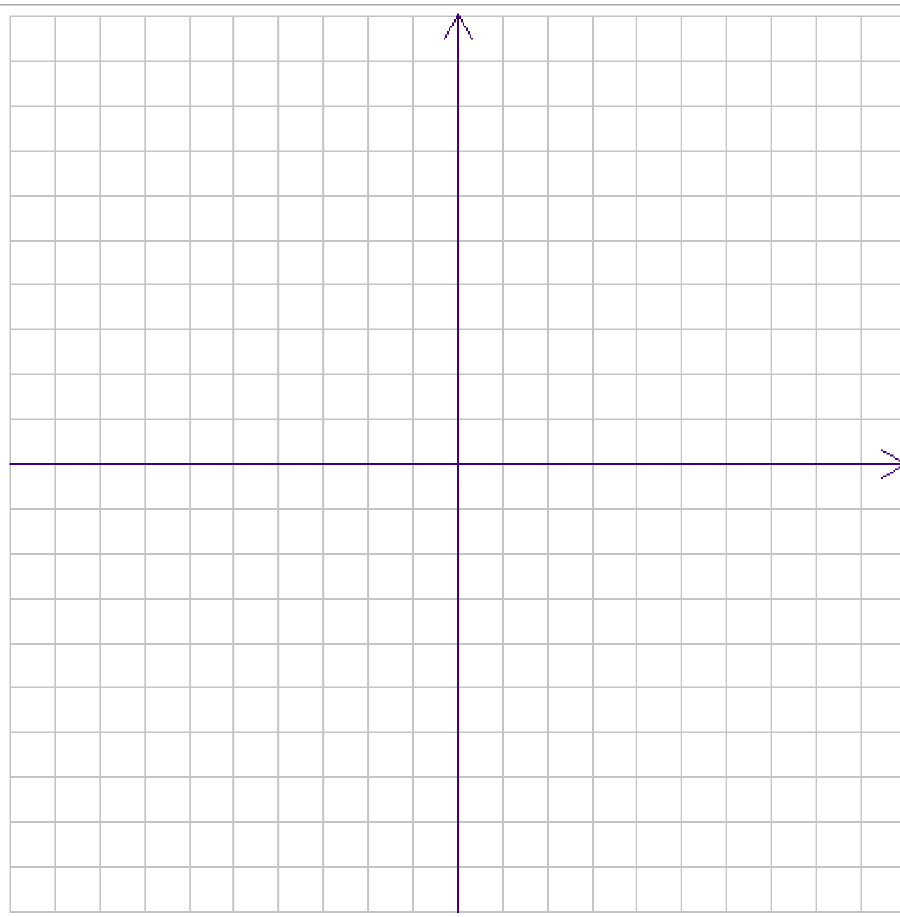




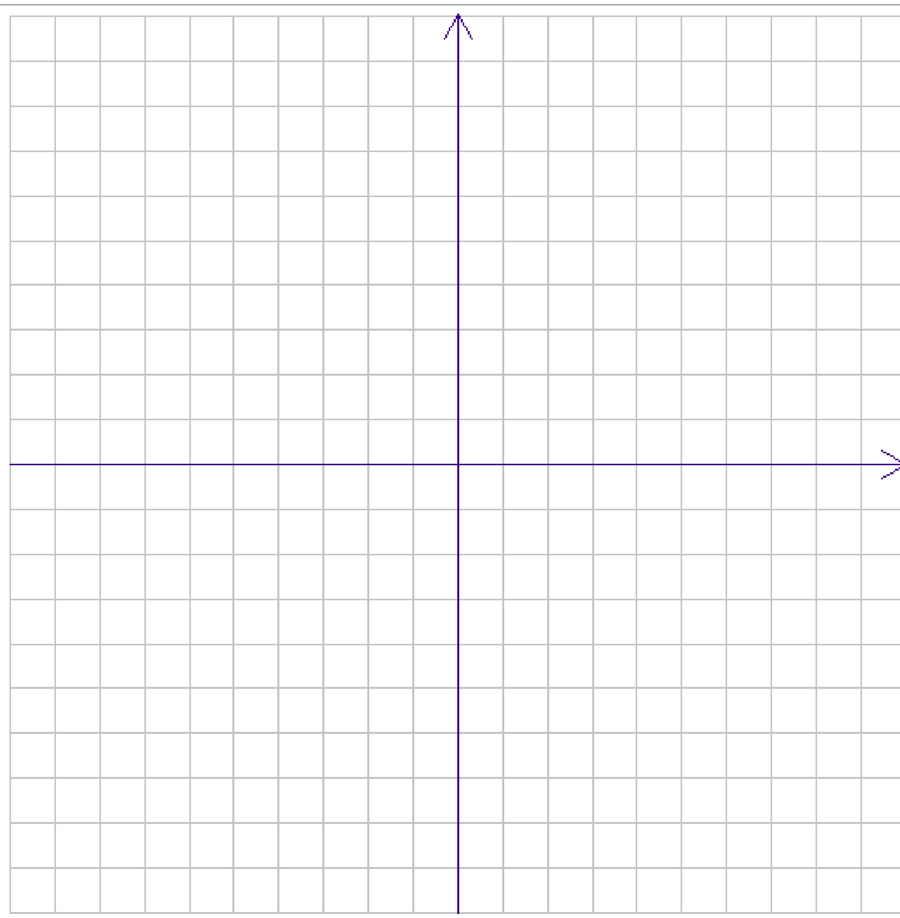
Outra maneira de resolução é empregar a fórmula: $A = 2\pi\int_a^b x.\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}.dx$

Exercícios:

1. Determinar a área da superfície gerada pela rotação da curva dada por $y = x^2$, em torno do eixo y, no intervalo $1 \leq y \leq 4$.

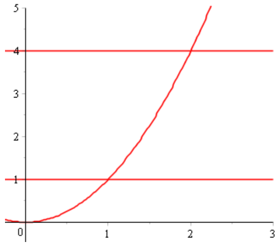


2. Determinar a área da superfície gerada pela rotação da curva dada por $y = 4x$, em torno do eixo y, no intervalo $0 \leq x \leq 2$.

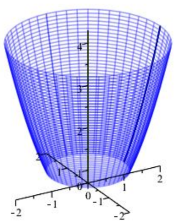


Respostas:

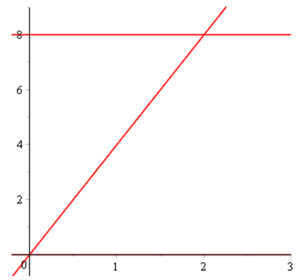
1.



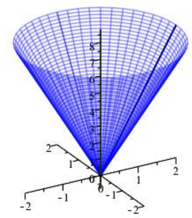
$\frac{1}{6}\pi\left(17\sqrt{17}-5\sqrt{5}\right)$



2.



$4\pi\sqrt{17}$



ÁREA		
1º Caso: $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$	2º Caso: $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [a,b]$	3º Caso: área é limitada por $f(x)$ e $g(x)$ para todo $x \in [a,b]$
$A = \int_a^b f(x)dx$	$A = \left\| \int_a^b f(x)dx \right\|$	$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

VOLUME		
	Eixo de Rotação	
1º Caso: $f(x) \geq 0$ ou $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [a,b]$.	Eixo dos x	$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 .dx$
2º Caso: a região S é gerada pela rotação de duas curvas $f(x)$ e $g(x)$.	Eixo dos x	$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right).dx$
3º Caso: A função $g(y)$ é contínua no intervalo $[c,d]$.	Eixo dos y	$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 .dy$
4º Caso: $f(x)$ gira ao redor de uma reta paralela a um dos eixos cartesianos.	Eixo paralelo ao eixo dos x (reta $y = L$)	$V = \pi \int_a^b [f(x) - L]^2 .dx$
	Eixo paralelo ao eixo dos y (reta $x = M$)	$V = \pi \int_c^d [g(y) - M]^2 .dy$

ÁREA		
	Eixo de Rotação	
1º Caso: $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.	Eixo dos x	$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.dx$
2º Caso: $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.	Eixo dos y	$A = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1 + [g'(y)]^2}.dy$

DERIVADAS

01	$y = c \Rightarrow y' = 0$
03	$y = c.u \Rightarrow y' = c.u'$
07	$y = u^{\alpha} \Rightarrow y' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$, $\alpha \neq 0$
08	$y = a^u \Rightarrow y' = a^u.\ln a.u'$, $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$
09	$y = e^u \Rightarrow y' = e^u.u'$
11	$y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$
13	$y = senu \Rightarrow y' = \cos u.u'$
14	$y = \cos u \Rightarrow y' = -senu.u'$

INTEGRAIS

01	$\int du = u + c$
02	$\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + c$
03	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, α constante e $\alpha \neq -1$
04	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c$
05	$\int e^u du = e^u + c$
06	$\int senudu = -\cos u + c$
07	$\int \cos udu = senu + c$

3. Bibliografia

DEMANA et al. *Pré-Cálculo*. Tradução de Aldy Fernandes da Silva e Eliana Crepaldi Uazawa. São Paulo: Pearson, 2009.

IEZZI, G. *Complexos, Polinômios e Equações*. 6 e. São Paulo: Atual, 1993. v.6. Fundamentos de Matemática Elementar.

IEZZI, G. *Trigonometria*. 7 e. São Paulo: Atual, 1993. v.3. Fundamentos de Matemática Elementar.

IEZZI, G; DOLCE, O; MURAKAMI, C. *Logaritmos*. 8 e. São Paulo: Atual, 1993. v.2. Fundamentos de Matemática Elementar.

POOLE, DAVID. *Álgebra Linear I*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

SAFIR, F. *Pré-Cálculo*. 5 ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

